APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Joyce Kelly De Jesus Santos[1]

Matemática

cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas

ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

Os projetos de circuitos elétricosmais rebuscados trazem consigo uma grande problemática: a complexidade e a quantidade de equações matemáticas necessárias para descrever as configurações aplicadas de acordocom os componentes utilizados. É o que acontece nos casos de circuitos compresença de capacitores e indutores. Visto que as relações constitutivas de tais componentes são descritas por derivadas e/ouintegrais, os cálculos se tornammais extensos. No entanto, doisartifícios matemáticos podem simplificar a análise dos circuitos e reduzir as etapas para desvendar valores e relações entre tensão e corrente: a Regra de Cramer, solucionando commaissimplicidade sistemas de equações lineares e a Transformada de Laplace, que facilita a manipulação de integrais e derivadas. Vale ressaltar que em circuitos elétricossempresão válidas as leis de superposição e linearidade. Assim, fazendo uso destesdois recursos, é possívelreduzir as equações que descrevem os circuitos presentes em umprojetoelétrico.

PALAVRAS-CHAVE

Circuito. Capacitor. Indutor. Cramer. Laplace.

ABSTRACT

The most elaborate electrical circuit designs bring with them a major problem: the complexity and quantity of mathematical equations needed to describe the applied configurations according to the components used. This is the case with circuits with capacitors and inductors present. Since the constitutive relationships of such components are described by derivatives and / or integrals, the calculations become more extensive. However, two mathematical devices can simplify circuit analysis and reduce the steps to unravel values and relationships between voltage and current: the Cramer Rule, simpler solving systems of linear equations, and the Laplace Transform, which facilitates the manipulation of integrals and derivatives. It is note worthy that in electric circuits the laws of superposition and linearity are always valid. Thus, by using these two features, it is possible to reduce the equations that describe the circuits present in an electrical project.

KEYWORDS

Circuit. Capacitor. Inductor. Laplace. Chain.

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos Circuitos Elétricos se divide em circuitos com corrente contínua e circuitos de corrente alternada, a diferença está na direção dos elétrons, quando os elétrons se movimentam em um único sentido é chamada de contínua e quando eles mudam a direção constantemente, estamos falando da corrente alternada. Além disso, os circuitos podem acumular cargas quando existe nele a presença de um capacitor; este componente, por sua vez, abre o circuito quando está carregado e por ele passa uma corrente contínua.

O indutor, por sua vez, é um dispositivo elétrico que armazena energia na forma de campo magnético, também é conhecido como bobina, choke ou reator. Em uma corrente contínua, ele atua como curto-circuito.

Na análise de circuitos com capacitor e indutor, é necessário calcular os valores de tensão e corrente, respectivamente, para isso é necessário encontrar as suas devidas equações que são por meio da derivada.

Outro recurso matemático essencial na solução e desenvolvimento de alguns circuitos elétricos é a Transformada de Laplace, que simplifica e facilita a análise de circuitos com armazenamento de energia (capacitivos e/ou indutivos) diante de um determinado sinal de entrada aplicado no circuito de modo que este sinal possa ser convertido matematicamente através de Laplace.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este artigo baseia-se em uma pesquisa exploratória, que tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, de forma a torná-lo mais explícito. Pode-se dizer que esse tipo de pesquisa tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições, envolvendo levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão (GIL, 2002). O estudo é feito com a elaboração de um referencial teórico, por meio de pesquisa documental e bibliográfica. Coletam-se dados que interessam ao objetivo geral do artigo e faz-se um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados com o tema proposto. Por fim, com todas as informações que são apreendidas e comparando-se diferentes resultados de experimentos passados, busca-se encontrar uma conclusão teórica ao problema proposto.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 INTRODUÇÃO AO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Na análise de circuitos, os valores são organizados em linhas e colunas, que formam agrupamentos retangulares denominados "matrizes". O estudo das matrizes e tópicos relacionados que constitui a matemática é denominado "Álgebra Linear".

Em um sistema bidimensional de coordenadas retangulares xy, a equação pode ser representada dessa forma:

ax + by = c

Já em um sistema tridimensional de coordenadas retangulares xyz, a equação pode ser representada dessa forma:

ax + by + cz = d

Esses são exemplos de equações lineares, a primeira com duas variáveis e a segunda com três variáveis. Quando existe equações lineares com n números de variáveis, ela pode ser expressa dessa forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... = a_nx_n$

Em que $a_{1,}$ $a_{2,...,}$ a_n são constantes, sendo que todos os *a* são nulos.

Figura 1 – Demonstração da resolução de um Sistema Linear com 3 variáveis

x+2y+3z=1
2x+5y+7z=3
-2x+3v-8z=4

O primeiro passo é escolher uma das equações e isolar alguma das incógnitas.

x+2y+3z=1
x=1-2y-3z

Nas outras equações, substitui o valor da incógnita isolada.

2x+5y+7x=3
2(1-2y-3z)+5y+7x=3
2-4x-6z+5y+7z=3
y+z=1

-2x+3y-8z=4
-2(1-2y-3z)+3y-8z=4
-2+4y+6z+3y-8z=4
7y-2z=6

As duas equações formarão um sistema linear com duas variáveis, que pode ser resolvida por qualquer método.

y+z=1 **×-7**
7y-2z=6

-7x-7y=-7
7y-2z=6

Resolvendo o sistema...

-9z=-1
z=0.111111111
y+z=1
y=1-0.111111111
y=0.89
x=1-2y-3z
x=1-2(0.89)-3(0.112)
x=-1.113

Fonte: Autoria Própria.

3.2 REGRA DE CRAMER

A Regra de Cramer é outra maneira de sistemas de Circuitos Elétricos, mas só poderá ser resolvida em sistemas que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

Os Valores das Incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$X1 = \frac{D1}{D} \quad X2 = \frac{D2}{D} \ \dots \ Xn = \frac{Dn}{D}$$

Figura 2 – Resolução do mesmo exemplo da Figura 1 por meio da Regra de Cramer

x+2y+3z=1
2x+5y+7z=3
-2x+3v-8z=4

Resolvendo o sistema através da Regra de Cramer.
Primeiro é necessario calcular o determinante do sistema:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & -2 & 3 \end{array}$$

Det= (-40-28+18)-(-32+21-30)
Det=-9

Para encontrar o valor de X, substitui os termos independentes na fileira correspondente.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -8 & 4 & 3 \end{array}$$

Dx= (-40+56+27)-(-48+21+60)
Dx=10

x= Dx÷Det
x=-9÷10
x=-1.11

Para encontrar o valor de Y, substitui os termos independentes na fileira correspondente.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -8 & -2 & 4 \end{array}$$

Dy= (-24-14+24)-(-16+28-18)
Dy=-8
Y=Dy÷Det
Y=(-8)÷(-9)
Y=0.89

Por fim, o valor de Z.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -8 & -2 & 4 \end{array}$$

Dz= (20-12+6)-(16+9-10)
Dz=-1
Z=Dz÷Det
Z=0.111111111

Fonte: Autoria Própria.

O mesmo sistema foi resolvido por meio de regras diferentes e obteve o mesmo resultado.

3.2 LEIS DE KIRCHOFF

Quando em um circuito elétrico existe mais de um resistor, fonte ou/e corrente, é necessário realizar cálculos por meio da Lei de Kirchoff para encontrar seus devidos valores. Esses cálculos podem ser realizados pela Lei dos Nós ou Lei das Malhas. As Leis de Kirchoff, são divididas em:

- Primeira Lei de Kirchoff ou Lei das Correntes;
- Segunda Lei de Kirchoff ou Lei das Tensões.

Existem dois tipos de elementos em um Circuito Elétrico, são os elementos *passivos* e elementos *ativos*, a diferença entre os dois é que um não é capaz de gerar energia, enquanto o outro é capaz, respectivamente. Um exemplo de elementos passivos são os resistores, capacitores e indutores. Os elementos passivos incluem os geradores, as baterias e os amplificadores.

Quando há mais complexidade em um circuito, não basta somente aplicar a Lei de Ohm para a resolução, tem que ter conhecimento sobre a Lei de Kirchoff para melhor análise do circuito.

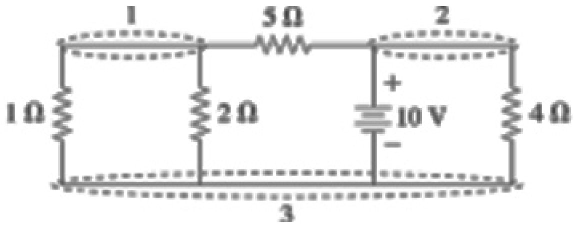
Para melhor entendimento e aplicação dos cálculos matemáticos, é necessário entender algumas definições:

Nó: é um ponto do circuito onde se conectam no mínimo três elementos, onde a corrente pode se dividir e o somatório das correntes que entram é igual a junção do valor das correntes que saem.

Ramo ou braço: é um trecho de um circuito compreendido entre dois nós consecutivos.

Malha: é um trecho de circuito que forma uma trajetória eletricamente.

Figura 3 – Circuito com cinco ramos e três nós



Fonte: Sadiku e Alexander (2014).

3.2.1 Lei de Kirchoff para Tensão

Não basta apenas a Lei de Ohm para analisar circuitos. Quando o Circuito Elétrico engloba a Lei de Kirchoff para Tensão (LKT) e a Lei de Kirchoff para Correntes (LKC) é necessário um estudo mais aprofundado.

A lei de Kirchoff para Tensão estabelece que a soma algébrica de todas as tensões ao longo de um caminho fechado (ou laço) é igual a zero (SADIKU, 2014; ALEXANDER, 2014)

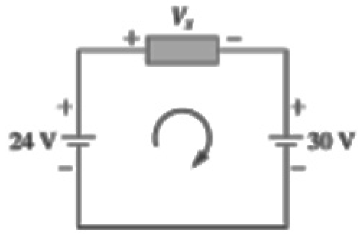
A LKT é baseada no princípio da conservação de energia em circuitos elétricos. Matematicamente, existem N tensões em um laço ou caminho fechado.

$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = 0$

Em que N é o número de tensões em um laço.

Determine o valor da tensão desconhecida no circuito da Figura 4.

Figura 4– Circuito LKT



Fonte: Sadiku e Alexander (2014).

Aplicamos a lei de Kirchoff para tensões, observando o sentido por meio da seta:

$$-24 + V_x + 30 = 0$$
$$V_x = 24 - 30 = -6V$$

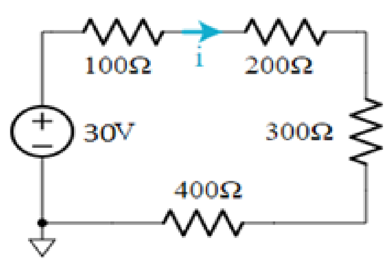
3.2.2 Lei de Kirchoff para Correntes

A Lei de Kirchoff das Correntes (LKC), se diz pela soma das correntes fluindo para um nó é igual a soma das correntes que saem pelo mesmo nó.

$$\sum Entra = \sum saem$$

O exemplo da Figura 3, foi utilizado a definição da Lei de Kirchoff das Correntes, para determinar o valor de *i*.

Figura 5 – Circuito LKC



Fonte: Autoria Própria.

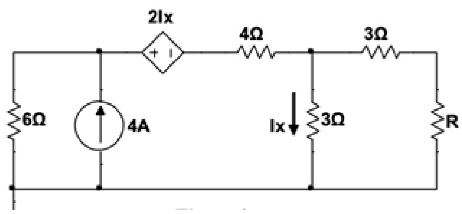
$$R_{série} = 100 \mid 200 \mid 300 \mid 400 = 1000\Omega$$

$$i = \frac{V}{R_{série}} = \frac{30V}{1000\Omega} = 0{,}03A \; ou \; 30mA$$

Exemplo:

Seja o circuito da Figura 6, para R=0Ω, determine o valor da corrente Ix pelo método dos nós.

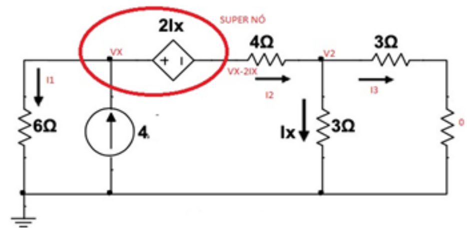
Figura 6



Fonte: Autoria Própria.

Como podemos observar na Figura 7, existe uma fonte corrente independente 2Ix e será necessário encontrar o valor das tensões e correntes por meio do método do super nó.

Figura 7



Fonte: Autoria Própria.

Equacionando o super nó:
Observação das correntes que entram e que saem do nó Vx:

$$4 = I_1 \mid I_2$$

$$SENDO\ I_1 = \frac{Vx - 0}{6}$$

$$4 = \frac{vx - 0}{6} + \frac{((Vx - 2Ix) - V_2)}{4}$$

Fazendo o M.M.C...

$$48 = \frac{(2Vx \mid 3Vx \quad 6Ix \quad 3V_2)}{12}$$

$$48 = 5Vx \quad 6Ix \quad 3V_2$$

$$Sendo\ Ix - \frac{V_2}{3}, logo, 48 - 5Vx - 6\frac{V_2}{3} - 3V_2$$

$$48 = 5Vx - 5V_2$$

Para o nó V2, temos:

$$I_2 = Ix \quad I_3$$

$$\frac{(Vx - 2Ix) - V_2}{4} = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2}{3} =$$

$$\frac{3Vx - 6Ix - 3V_2}{12} - 4V_2 + 4V_2$$

$$3Vx \quad 6Ix \quad 3V_2 = 8V_2$$

$$3Vx - 6\frac{V_2}{3} - 3V_2 - 8V_2$$

$$0 = 3Vx \mid 3V_2$$

Formou um Sistema Linear com duas incógnitas

$$5Vx - 5V_2 - 48$$

$$3Vx \quad 13V_2 = 0$$

$$5Vx = 48 \mid 5V_2$$

$$Vx = \frac{48 \mid 5V_2}{5}$$

Substituindo na 2 equação, temos:

$$3Vx \mid 3V_2 = 0$$

$$3\left(\frac{48 + 5V_2}{5}\right) - 13V_2 = 0$$

Isola V_2, e descobre seu respectivo valor.

$$144 \mid 15V_2 \quad 65V_2 = 0$$

$$144 - 50V_2 = 0$$

$$50V_2 = \quad 144$$

$$V_2 = 2.88V$$

Para encontrar o valor de V_x, escolhe uma das duas equações.

$$3Vx \quad 13V_2 = 0$$

$$3Vx \quad 13(2.88) = 0$$

$$Vx = \frac{37,44}{3}$$

$$Vx = 12,48V$$

Encontrando os valores de

$$I_1 = \frac{Vx}{6} = \frac{12.48}{6} = 2.08A$$

$$I_2 \frac{-((Vx - 2Ix) - V_2}{4} = \frac{((12.48 - (2 \times 0.96)) - 2.88)}{4} = 7.60A$$

$$I_3 = \frac{V_2}{3} = \frac{2.88}{3} = 0.96A$$

3.3 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se a equação abaixo for bem definida no conjunto dos números reais não negativos e convergir, então ela é chamada de Transformada de Laplace da função f(t):

$$\mathbf{L\{f(t)\}} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

E, desta forma, F(s) é a transformada de Laplace de f(t) de modo que, se aplicarmos a transformada de Laplace inversa em F(s), encontraríamos f(t). Assim:

$$L^{-1}\{\mathbf{F(s)}\} = f(t)$$

Um exemplo clássico no mundo dos circuitos elétricos, é a Transformada de Laplace de um sinal degrau, ou seja, um sinal que é nulo e passa a valer 1 a partir de um determinado instante t, onde t=0:

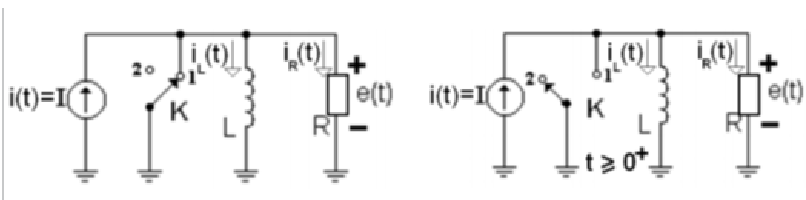
$$\mathbf{L\{f(t)\}} = \int_0^{\infty} 1e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

E, a partir daí, pode-se dizer que a Transformada de Laplace da função degrau é 1/s. Saber isto é muito importante, pois inúmeras situações de análise de circuitos elétricos começam com a aplicação de um sinal degrau.

3.3.1. Solução de Circuitos Elétricos Utilizando a Transformada de Laplace

No circuito abaixo, a chave K muda da posição 1 para a posição 2 no instante de tempo em que t = 0s.

Figura 8



Fonte: MULTISIM.

I é o valor da corrente, em amperes, na fonte de corrente iL é o valor da corrente presente no indutor de valor L (em Henry); e iR é a corrente presente no resistor de valor R. É preciso saber, então, qual é a tensão e(t) presente no resistor a partir de t=0. Ou seja, é preciso saber qual é a função que descreve a tensão aplicada no resistor a partir do instante em que a corrente I é aplicada no circuito.

A partir do instante em que a chave abre, iR(t) = I – iL(t), ou seja, i(t) = iR(t) + iL(t). E, aplicando a transformada de Laplace, encontra-se o seguinte:

L[i(t)] = L[iL(t) + iR(t)];

L[i(t)] = L[iL(t)] + L[iR(t)];

I(s) = IL(s) + IR(s).

A relação constitutiva do indutor diz que

$$iL = \frac{1}{L}\int edt$$

Assim, sendo, iL(s) = L).$(\frac{1}{L}\int_0^t edt = \frac{iL}{s} + \frac{E(s)}{sL})$

Da mesma maneira, encontra-se iR = $\frac{E(s)}{s}$.

Assim:

$I(s) = IL(s) + IR(s);$

$I(s) = \frac{iL}{s} + \frac{E(s)}{sL} + \frac{E(s)}{s};$

$E(s) = (RI\ (\frac{1}{s+R/L}))$

E, finalmente,

$$e(t) = L^{-1}(RI\ .\ \frac{1}{s+R/L});$$

$$e(t) = RI\ .\ e^{-Rt/L}$$

4 CONCLUSÃO

Por meio desta pesquisa, é possível concluir a importância da matemática em circuitos elétricos de corrente contínua, especificamente, os Sistemas Lineares com as equações lineares e regra de cramer para encontrar o valor das correntes e tensões em circuitos elétricos, bem como a transformada de laplace, que facilita a manipulação de integrais e derivadas.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

GIL, Francisco. J. Gómez *et al*. A review of solar tracker patents in Spain. *In*: PERLOVSKY, L.; DIONYSIOU, D. D.; ZADEH, L. A.; KOSTIC, M. M. *et al*. (Ed.). **Energy Problems and Environmental Engineering**. University of La Laguna, Tenerife, Canary Islands Spain, July 1-3, 2009. p. 292-297.

GONZALES-CONCEPCION, C.; JABERG, H.; MASTORAKIS, N. E.; ZAHARIM, A.; SOPIAN, K. (Ed.). **World Scientific and Engineering Academy and Society**. Athens, 2009. p. 292-297

OPPENHEIM, Alan V. **Sinais e sistemas**. 2. ed. Upper Saddle River, Nova Jersey, EUA: Prentice-Hall, 2010.

SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K.; MUSA, Sarhan. **Análise de circuitos elétricos com aplicações**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.

SANTOS, Wanderson Vieira Dias; PRIMO, Aislan Silva. Aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica: análise de circuitos elétricos em corrente contínua. **Caderno de Graduação-Ciências Exatas e Tecnológicas**, UNIT, v. 4, n. 2, p. 25, 2017.

Data do recebimento: 19 de fevereiro de 2020
Data da avaliação: 9 de junho de 2020
Data de aceite: 9 de junho de 2020

1 Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática – UNIT. E-mail: kellysantosmf@yahoo.com.br