APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA EM PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Flávia Lins De Amorim[1]
Júlio César Santos[2]
Nadielza Carvalho Santos[3]

Matemática
cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas
ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

Com este trabalho visa-se enriquecer o conhecimento do aluno em relação à aprendizagem de progressão aritmética e geométrica, tornando mais comum o hábito de dedução matemática na didática do jovem. A utilização de um teorema de comprovação para o assunto de progressões numéricas serve como um novo hábito a ser seguido para que cada vez mais os alunos tenham o conhecimento de o que estão estudando e calculando. Não focando apenas no assunto de progressão, mas em todo o conteúdo de ensino médio, a aplicação do método de indução servirá como método chave para um aprofundamento teórico mais eficaz e com grande contribuição acadêmica.

PALAVRAS-CHAVE

Indução Matemática. Progressões Aritmética e Geométrica. Matemática Básica.

ABSTRACT:

Aiming to enrich the student's knowledge regarding the learning of arithmetic and geometric progression, making the habit of mathematical deduction more common in the didactics of the young person. The use of a proof theorem for the subject of numerical progressions serves as a new habit to be followed so that more and more students have the knowledge of what they are studying and calculating. Not only focusing on the subject of progression, but throughout the content of high school, the application of the induction method will serve as a key method for a more effective theoretical deepening and with great academic contribution.

KEYWORDS

Mathematical Induction, Arithmetic and Geometric Progressions, Basic Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda os princípios do método de indução, fundamentação teórica e aplicação matemática, com o intuito de ser estudado no ensino médio, tendo como ênfase a aplicação nas progressões aritméticas e geométricas.

O motivo pelo qual escolhemos este tema para estudo foi a sua capacidade de demonstrações matemáticas, estes atos de persuasão fundamentada em argumentações lógico-dedutivas, por meio dos quais nos comprovamos um fato matemático (uma proposição, um lema, um teorema etc.).

Na matemática, as proposições podem ser comprovadas pelo uso de vários métodos. Aplicando-os, podemos provar que uma determinada propriedade é verdadeira ou não, verificando se ela constitui, de fato, um teorema. Onde essas comprovações matemáticas, possuem fundamental importância tanto no resultado obtido quanto no processo de aprendizagem durante o desenvolvimento do método. Visando essa concepção, este trabalho tem como principal interesse introduzir o método de indução, de maneira mais eficaz, ao ensino médio como um dos métodos de demonstração, para validar teoremas e proposições matemáticas, envolvendo progressões numéricas.

O atual sistema de ensino brasileiro necessita de novas ideias e novas metodologias, que visem um melhor desempenho educacional. A matemática tem como tradição uma carência na evolução de novos métodos de ensino, seja por falta de profissionais capacitados como falta de incentivo nas escolas, somado com o atual modelo de avaliação feito, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o ensino da matemática vem se tornando uma disciplina resumida meramente a análise de padrões e fórmulas para resolver problemas. Tendo o intuído de demonstrar, não somente a importância de encontrar um resultado, mas também de comprovar sua eficácia em qualquer situação, por meio do método de indução o aluno de ensino médio será obrigado a destrinchar todos os conceitos teóricos do assunto de progressão, assim, alcançando um melhor entendimento.

Veremos que este teorema é muito útil para comprovar fórmulas e proposições dadas em situações em que não serão encontrados valores numéricos.

Este trabalho trata de fundamentar o método de indução, de uma forma mais eficaz aos alunos de ensino médio, trazendo novas concepções e condições para utilização do teorema.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 INDUÇÃO MATEMÁTICA

A Indução Matemática, é um método de demonstração que é trabalhado principalmente nos cursos de Álgebra, Matemática Discreta ou de Teoria dos Números, possui inúmeras aplicações em todas as áreas da matemática. A Indução Matemática foi criada a partir do último postulado de Peano, o qual praticamente define os números naturais que entender o Princípio da Indução Matemática é praticamente entender os números naturais (LIMA, 2007), mas foi depois de Morgan, em 1883, que foi desenvolvido esse processo aprimoradamente, e deu a ele o nome atual (LOUREIRO, s/d).

É um decisivo instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais, o princípio de Indução Matemática é a elaboração matemática de uma experiência muito popular, popularmente conhecida como efeito dominó (ANTAR NETO, 1979; RIPOLL *et al.*, 2006). O mesmo é muito bem visualizado em uma brincadeira popular da infância.

> [...] enfileiramos as peças de um jogo de dominó afastadas a certa distância uma das outras. A seguir damos um toque em alguma peça de fila, derrubando-a; notamos então que se esta estiver conveniente afastada da seguinte, esta derrubará a seguinte que, por sua vez, se estiver conveniente afastada da próxima, derrubará a próxima e assim por diante. Ao final, se as peças estiverem todas convenientemente afastadas umas das outras, acabarão por serem derrubadas todas as pelas a partir daquela em que se deu o toque [...]. (RIPOLL *et al.*, 2006 p. 38).

Esteves (2001), por sua vez salienta em sua pesquisa a dificuldade que os alunos têm na elaboração e utilização do diagrama de árvores na resolução de problemas combinatórios. O diagrama de árvores também pode ser definido, como um processo repetitivo. Segundo Batanero (1996), o diagrama de árvores, como recurso na resolução de problemas, tem um caráter repetitivo, pois, uma árvore com *n* níveis de ramificações se forma a partir de outra árvore com *n-1* níveis de ramificação.

> O raciocínio indutivo, ou sintético, é mais do que a mera aplicação de uma regra geral a um caso particular. Parte de uma premissa menor para uma maior. A indução é a inferência de uma regra a partir do caso e do resultado. Sendo assim, ela ocorre quando generalizamos a partir de certo número de casos em que algo é verdadeiro e inferimos que a mesma coisa será verdadeira do total da classe. (DIAS; MARCOS, 2005, p. 5).

Exemplo de indução:
Demonstre por indução: $\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,(n\geq 1)}$

i) A proposição é verdadeira para n=1, pois:

$$\mathbf{1=\frac{1(1+1)}{2}=1}$$

ii) Supondo que a proposição seja verdadeira para um k $\in$ A, então:

$$\mathbf{1+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}}$$

iii) Substituindo por em ambos:

$$\mathbf{1+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)}$$
$$\mathbf{1+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}}$$

Por i, ii e iii a proposição é válida para todo n $\in$ Z maior ou igual a 1.

2.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Vale e Pimentel (2005) consideram as atividades que possuem tarefas gerais baseadas em padrões necessárias para estabelecer junção entre os padrões e a Álgebra. Vale e Pimentel (2005) argumentam também que a busca por padrões é uma parte árdua na resolução de problemas e no trabalho investigativo, consideram que é muito importante que haja o desenvolvimento dessa aplicabilidade nos estudantes, inicialmente com as tarefas de reconhecimento de padrões de medidas para facilitar e consequentemente as tarefas mais complexas.

Um dos grandes defensores do trabalho com padrões e referência em diversos estudos sobre o tema é John Mason (1996), pesquisador inglês que afirma que o futuro da progressão aritmética e da álgebra depende somente da utilização e do sentido da maioria.

Historicamente as progressões aritméticas exercem competências para o desenvolvimento da Matemática e atualmente ainda continua cumprindo função muito importante. Seu estudo sendo muito bem explorado, pode acabar incitando no aluno a capacidade de pressupor e generalizar o conhecimento. Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) apontam a percepção de regularidades em situações-problema que levam à generalização como uma concepção para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Embora as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) afirmem que o domínio das funções seja o conjunto dos números naturais, é notório que não há explicação e esclarecimento sobre gráficos contínuos e discretos. Sabemos que ao se trabalhar com progressões aritméticas estamos lidando com variáveis discretas, sendo que o domínio é conjunto dos números naturais. Entretanto, o gráfico das progressões aritméticas é formado por pontos discretos. É importante destacar pois, caso contrário, pode gerar nos alunos uma semelhança em sempre ligar os pontos de um gráfico, que seria incorreto.

2.2.1 Definição

As progressões aritméticas (PA) são exemplos particulares de sequências. Podemos definir uma progressão aritmética como:

> Uma progressão aritmética (P.A.) infinita é uma sequência a1, a2, [...], an -1 ,an, [...], onde cada termo, a partir do segundo, é a soma an +1 = an + r do termo anterior mais uma constante r, chamada a razão da progressão. Equivalentemente, a sequência (xn) chama-se uma progressão aritmética de razão r quando an +1 - an = r para todo n N (LIMA, 2001, p. 74).

As progressões aritméticas são classificadas em três categorias:

Crescentes são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isto ocorre somente se r > 0, pois:

$$a_n > a_{n-1} <=> a_n - a_{n-1} > 0 <=> r > 0$$

Constantes são as PA em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isto só ocorre quando r = O, pois:

$$a_n = a_{n-1} <=> a_n - a_{n-1} = 0 <=> r = 0$$

Decrescentes são as PA em que cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre somente se r < O, pois:

$$a_n < a_{n-1} <=> a_n - a_{n-1} < 0 <=> r < 0$$

2.2.2 Termo geral de uma PA

Temos, utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma PA e admitindo dados o primeiro termo (a1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

E, somando essas igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1) \times r$$

Então:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

Na PA em que o primeiro termo é a1 e a razão é r, o n-ézimo termo é:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

a_n= n-ésimo termo (termo geral);
a_1= primeiro termo;
n= quantidade de termos;
r = razão = (a_i-a_{i-1});

Demonstração pelo princípio da indução finita:
I) Para n=1 temos: a_1=a_1+(1-1).r (sentença verdadeira)
II) Admitamos a validade da fórmula para n=p (Hipótese de Indução):

$$a_p = a_i + (p-1) \times r$$

Deve-se provar que é verdadeira para n=p+1:

$$a_{p+1} = a_p + r \times [a_1 + (p-1) \times r] = a_1 + [(p+1) - 1] \times r$$

Então:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r, V\, n \in \mathbb{N}^*$$

2.2.3 Soma dos termos de uma PA finita

Pode-se deduzir a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, utilizando a propriedade de termos equidistantes. Esta propriedade afirma que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Utilizando esta propriedade temos:

Seja a PA $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ e S_n e S_n a soma dos n termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Ao somar as equações, tem-se:

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Constata-se que na equação acima, todos termos entre parênteses possui soma (a_1+a_n), portanto:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

2.3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Segundo Maia (2011) a falta de contextualização histórica e real é um dos problemas mais significativos no ensino de Progressões. Ele cita que este conceito é explanado relacionado com aplicações do cotidiano, visando simplificar o aprendizado dos estudantes.

Ainda de acordo com Maia (2011) o estudo das progressões teve início com povos antigos, como os babilônicos ou os egípcios que queriam precisar as enchentes do rio Nilo, para desta forma descobrir a época certa de plantio e assim garantir seu sustento. Foi usando as progressões que foi possível montar um calendário, contendo 365 dias como conhecemos hoje em dia. Citando os papiros egípcios, que apesar de se degradarem com o tempo, ainda conseguiu-se recuperar seus conteúdos.

Em meio aos muitos papiros encontrados, o mais abrangente é o Papiro Rhind, com aproximadamente 30 centímetros de altura por 5 metros de comprimento, encontrado em 1858 por A. Henry Rhind, um antiquário escocês enquanto visitava o Egito. Rhind comprou-o em uma cidade perto do Rio Nilo. Atualmente o papiro está no British Museum (exceto alguns fragmentos que estão no Brooklin Museum). O papiro possui 87 problemas e suas resoluções, problemas estes baseados em situações cotidianas (GONÇALVES, 2007)

Ainda de acordo com Gonçalves (2007), o Papiro de Rhind cita apenas um problema de Progressões Geométricas em que tanto o primeiro termo quanto a razão são iguais ao número 7. O enunciado do problema apresentado dessa maneira:

"7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hecates".

Segundo Boyer (1998) este problema no Papiro de Ahmes (ou Rhind) se assemelha a um verso infantil chamado "Quantos iam a Ives" que diz: "Quando eu ia a S.to Ives, encontrei um homem com sete mulheres, cada mulher tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatos, cada gato tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatos e sacos e mulheres, quantos iam a S.to Ives?" (BOYER, 1998).

De acordo com Martins (2013), o problema na versão egípcia pode ser solucionado, considerando que os números consistem em cinco termos de uma progressão geométrica, na qual o primeiro termo, 7, é também a razão. Objetiva-se mostrar que em cada uma das sete casas, existem 7 gatos, cada gato captura 7 ratos, cada rato comeu sete espigas de milho, cada espiga de milho, caso fosse semeada produziria 7 hekat de grãos. Sendo apresentado a seguir na Figura 1:

Figura 1 – Resolução do problema nº 79 do Papiro de Rhind

	7	casas
	49	gatos
	343	camundongos
	2401	[espigas de] espelta [erroneamente escrito 2301]
	16807	*hekat* [de grãos]
Total	19607	

Fonte: Martins (2013).

A grande curiosidade matemática está em saber que os egípcios tinham sua forma de somar os termos de uma progressão e assim, encontrar o mesmo resultado desta progressão. A execução desse problema na forma egípcia pode ser vista em uma coluna separada:

Figura 2 – Resolução do problema nº 79 do Papiro de Rhind na forma egípcia

1	2801
2	5602
4	11204
Total	19607

Fonte: Martins (2013).

Pode-se notar que a soma dos termos, 2801, foi multiplicada por 7 para que se obtivesse o resultado de 19607. Para elucidar o cálculo da soma que resultou em 2801, analisa-se termo a termo como na figura a seguir:

Figura 3 – Adição dos termos do problema

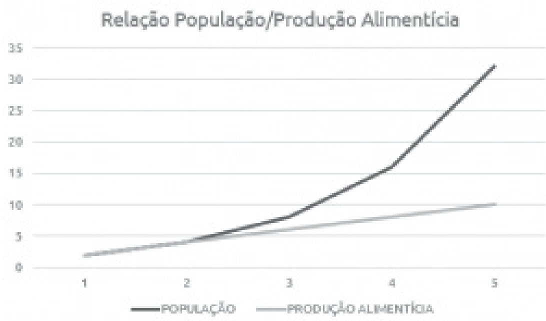
$$\begin{array}{rl} 7 & 7 \\ 7 \times 7 & 7(1+7) = 56 \\ 7 \times 7 \times 7 & 7(1+56) = 399 \\ 7 \times 7 \times 7 \times 7 & 7(1+399) = 2800 \\ 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 & 7(1+2800) = 19607 \end{array}$$

Fonte: Martins (2013).

Nota-se que a cada fase a soma é encontrada adicionando-se a soma anterior mais um e o valor resultante multiplicado por 7 que é a razão. Para encontrar o valor final de 19607, por exemplo, a soma anterior, soma da série de 4 termos, foi igual a 2800, somada ao número 1, encontra-se o valor de 2801, que multiplicado por 7 dá a soma de cinco termos, ou seja, 19607.

Encontra-se, relacionando as progressões geométricas com situações mais atuais, na obra de Moreira (2015) uma teoria criada pelo economista e demógrafo inglês Tomas Robert Malthus (1766-1834) chamada "Malthusianismo", em que relaciona o crescimento populacional, que cresce em progressão geométrica e a geração de alimentos, que cresce em progressão aritmética, levando a uma futura situação de crise de falta de alimentos, como pode ser visto na Figura 4:

Figura 4 – Teoria Básica de Malthus



Fonte: Jesus (2014).

2.3.1 Definição

As progressões geométricas (PG) são definidas como sequências na forma, a_1, a_2, a_3, ..., a_n onde qualquer termo, a começar do segundo, pode ser encontrado a partir da equação:

$$a_n = a_{n-1} \times q, \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Na qual é uma constante chamada razão. Deste modo, PG é uma sequência na qual todo termo, a começar do segundo, é o produto do anterior por uma constante q determinada.

2.3.2 Termo geral de uma PG

A equação do termo geral, de uma PG possibilita descobrir qualquer termo da progressão.

Encontramos, empregando a definição de PG:

$$a_2 = a_1 \times q^1$$
$$a_3 = a_2 \times q = a_1 \times q^2$$
$$a_4 = a_3 \times q = a_1 \times q^3$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

2.3.3 Soma dos termos de uma PG

Na soma (Sn) de uma PG podem ocorrer quatro casos:

Se q=0, $S_n=a_1$;

Se q=1; $S_n=n \times a_1$

Se |q|>1, S_n diverge quando n tende a infinito;

Se |q|<1, S_n converge para um determinado valor de N quando n tende a infinito.

2.3.4 Soma dos termos de uma PG finita

Nesta situação, a soma dos n termos da PG (S_n)pode ser determinada da forma a seguir.

Seja a PG finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) ou ($a_1 \times q$, $a_1 \times q^2$, $a_1 \times q^3$, ..., $a_1 \times q^{n-1}$) com q≠0, a soma S_n dos termos desta PG é determinado por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 \times q + a_1 \times q^2 + \cdots + a_1 \times q^{n-1}$$

Porém se |q|>1, tem-se:

$$S_n = a_1 + a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + \cdots + a_1 \times q^{n-1}$$

Ao multiplicar a Equação da Soma de termos por , temos:

$$q \times S_n = a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + \cdots + a_1 \times q^{n-1} + a_1 \times q^n$$

Ao subtrair a Equação da Soma de termos multiplicada com pela equação da Soma dos termos obtêm-se:

$$S_n(q-1) = a_1 \times (q^n - 1)$$

Portanto a dos termos de uma PG finita é encontrada por meio da equação:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

2.3.5 Soma dos termos de uma PG infinita

Neste cenário, |q|<1, a soma S_n converge para n no infinito.

Tendo em vista a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, podemos observar que a medida que são inseridos termos, a soma irá ficar mais próxima ao número 1, isto é, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

Seja uma PG infinita a_1, a_2, a_3, ..., a_n, afirma-se que $a_1+a_2+\ldots=S$ caso o limite das somas parciais, $S_1= a_1$, $S_2= a_1+ a_2$, $S_3= a_1+ a_2+ a_3$,..., $S_n=a_1+ a_2+ a_3+\ldots a_n$ em que n tende a infinito é S, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Seja a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \times (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)$. O limite de S_n em que n tende a infinito é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_1 \times q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \times q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - a_1 \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$$

Como |q|<1: $\lim_{n\to\infty} = 0$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Ou seja,

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

2.3.6 Aplicabilidade:

EXEMPLO 1:

Calcule a soma dos "n" primeiros termos da PA infinita (6, 10, 14, 18,...) e por meio do método de indução, comprove.

$$S_n = \frac{(6 + (4n+2)).n}{2}$$
$$S_n = \frac{4n^2 + 8n}{2}$$
$$S_n = 2n^2 + 4n$$

Por meio da fórmula de termo geral, encontramos o valor de "a_n" como sendo a_n=4n+2.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$
$$S_n = \frac{(6 + (4n+2)).n}{2}$$
$$S_n = \frac{4n^2 + 8n}{2}$$
$$S_n = 2n^2 + 4n$$

Por meio da fómula de soma dos termos de uma PA, encontramos o valor de "S_n"como sendo S_n=$2n^2$+4n. No entanto, como podemos garantir que o "a_n" como o "S_n" estão corretos e funcionarão para um "n" qualquer $\in \mathbb{N}$?

Ao utilizar do método de indução, teremos que buscar duas conclusões:

1. Devemos que considerar "n" como um termo muito grande.
2. Ambas deverão funcionar para o termo posterior a "n", que no caso será o "n+1".

Para isso, deveremos lembrar o seguinte:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n$$

Se adicionarmos um novo termo (a_{n+1}), a PA, com a mesma razão, sendo posterior ao a_n, consecutivamente esse novo termo será adicionado ao S_n, assim dando origem ao S_{n+1}.

Concluindo que:

$$\overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Primeiramente deveremos encontrar o a_{n+1}:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Por ser o termo posterior ao a_n, o a_{n+1} será encontrado por meio da soma com a razão.

$$a_{n+1} = 4n + 2 + 4$$
$$a_{n+1} = 4n + 6$$

Depois de encontrado o a_{n+1}, retornaremos a preposição:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Descobrimos também que:

$$S_{n+1} = 2.(n+1)^2 + 4.(n+1)$$
$$S_{n+1} = 2.(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4$$
$$S_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4$$
$$S_{n+1} = 2n^2 + 8n + 6$$

Onde deveremos provar a relação de igualdade de "$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$".

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$
$$(2n^2 + 4n) + 4n + 6 = 2n^2 + 8n + 6$$
$$2n^2 + 8n + 6 = 2n^2 + 8n + 6$$

Como ambos são iguais, então "a_n" e "S_n" servem sendo n qualquer valor $\in \mathbb{N}$. Finalizando, podemos chegar à seguinte fórmula de comprovação:

$$\mathbf{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$$

EXEMPLO 2:

Calcule a soma dos "n" primeiros termos da P.G infinita (1, 2, 4, 8,...) e por meio do método de indução, comprove.

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_n = 1 . 2^{n-1}$$
$$a_n = 2^{n-1}$$

Por meio da fórmula de termo geral, encontramos o valor de" a_n" como sendo $a_n=2^{n-1}$.

$$S_n = \frac{1.(1 - 2^n)}{1 - 2}$$
$$S_n = \frac{1 - 2^n}{-1}$$
$$S_n = 2^n - 1$$

Por meio da fórmula de soma dos termos de uma PA, encontramos o valor de "S_n "como sendo S_n=2^n-1. No entanto, como podemos garantir que o "a_n" como o "S_n" estão corretos e funcionaram para um n qualquer $\epsilon \mathbb{N}$?

Ao utilizar do método de indução, teremos que buscar duas conclusões:

1. Devemos que considerar n como um termo muito grande.
2. Ambas deverão funcionar para o termo posterior a n, que no caso será o "n+1".

Para isso, deveremos lembrar o seguinte:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n$$

Se adicionarmos um novo termo (a_{n+1}), a PA, com a mesma razão, sendo posterior ao , consecutivamente esse novo termo será adicionado ao S_n, assim dando origem ao S_{n+1}.

Concluindo que:

$$\overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Primeiramente deveremos encontrar o a_{n+1}:

$$a_{n+1} = a_n \, . \, q$$

Por ser o termo posterior ao a_n, o a_{n+1} será encontrado por meio da soma com a razão.

$$a_{n+1} = 2^{n-1} \, . \, 2$$
$$a_{n+1} = 2^{n-1+1}$$
$$a_{n+1} = 2^n$$

Depois de encontrado o a_{n+1}, retornaremos a preposição:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Descobrindo também que:

$$S_{n+1} = \frac{a_1 \, . \, (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$
$$S_{n+1} = \frac{1 \, . \, (1 - 2^{n+1})}{1 - 2}$$
$$S_{n+1} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$$
$$S_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

Onde deveremos provar a relação de igualdade de "S_n+a_{n+1} =S_{n+1}".

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$
$$(2^n - 1) + 2^n = 2^{n+1} - 1$$
$$2 \, . \, 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$
$$2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Como ambos são iguais, então "a_n" e "S_n " servem sendo "n" qualquer valor $\in \mathbb{N}$. Finalizando, podemos chegar à seguinte fórmula de comprovação:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

EXEMPLO 3:

Encontre, possuindo a seguinte soma $i^1+i^2+i^3+i^5+...+i^n=S_n$, o valor e sua comprovação.

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_n = i . i^{n-1}$$
$$a_n = i^n$$

Por meio da fórmula de termo geral, encontramos o valor de"a_n" como sendo $a_n=2^{n-1}$.

$$S_n = \frac{a_1 . (1 - q^n)}{1 - q}$$
$$S_n = \frac{i . (1 - i^n)}{1 - i}$$
$$S_n = \frac{1 - i^n}{1 - i} . \frac{(1 + i)}{(1 + i)}$$
$$S_n = \frac{1 - i^n . (1 + i)}{1^2 - i^2}$$
$$S_n = \frac{i + i^2 - i^{n+1} - i^{n+2}}{1 + 1}$$
$$S_n = \frac{i - 1 - i^{n+1} - i^n . i^2}{2}$$
$$S_n = \frac{i - 1 - i^{n+1} + i^n}{2}$$

Por meio da fórmula de soma dos termos de uma PA, encontramos o valor de "S_n "como sendo $S_n=2^n-1$. No entanto, como podemos garantir que o "a_n" como o "S_n" estão corretos e funcionarão para um n qualquer $\in \mathbb{N}$?

Ao utilizar o método de indução, teremos que buscar duas conclusões:

1. Devemos que considerar "n" como um termo muito grande.
2. Ambas deverão funcionar para o termo posterior a "n", que no caso será o "n+1".

Para isso, deveremos lembrar o seguinte:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = S_n$$

Se adicionarmos um novo termo (a_{n+1}), a PA, com a mesma razão, sendo posterior ao a_n, consecutivamente esse novo termo será adicionado ao S_n, assim dando origem ao S_{n+1}.

Concluindo que:

$$\overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n} + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Primeiramente deveremos encontrar o a_{n+1}:

$$a_{n+1} = a_n . q$$

Por ser o termo posterior ao a_n, o a_{n+1} será encontrado por meio da soma com a razão.

$$a_{n+1} = i^n . i$$
$$a_{n+1} = i^{n+1}$$

Depois de encontrado o a_{n+1}, retornaremos à preposição:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

Descobrindo também que:

$$S_{n+1} = \frac{a_1 . (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$
$$S_{n+1} = \frac{i . (1 - i^{n+1})}{1 - i}$$
$$S_{n+1} = \frac{i - i^{n+2}}{1 - i} . \frac{(1 + i)}{(1 + i)}$$
$$S_{n+1} = \frac{(i - i^{n+2}) . (1 + i)}{1^2 - i^2}$$
$$S_{n+1} = \frac{i + i^2 - i^{n+2} - i^{n+3}}{2}$$
$$S_{n+1} = \frac{i - 1 - i^n . i^2 - i^n . i^3}{2}$$
$$S_{n+1} = \frac{i - 1 + i^n + i^{n+1}}{2}$$

Onde deveremos provar a relação de igualdade de "$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$".

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$
$$\frac{i - 1 - i^{n+1} + i^n}{2} + i^{n+1} = \frac{i - 1 + i^n + i^{n+1}}{2}$$
$$\frac{i - 1 - i^{n+1} + i^n + 2 . i^{n+1}}{2} = \frac{i - 1 + i^n + i^{n+1}}{2}$$
$$\frac{i - 1 + i^n + i^{n+1}}{2} = \frac{i - 1 + i^n + i^{n+1}}{2}$$

Como ambos são iguais, então "" e "" servem sendo qualquer valor . Finalizando, podemos chegar à seguinte fórmula de comprovação:

3 CONCLUSÃO

A importância do método de indução, se bem explorado, traz grandes benefícios, em contrapartida, traz a dificuldade de abordar tal assunto e deixá-lo compreensível para o jovem. Esta dificuldade foi a maior tarefa neste trabalho, visto que, os alunos não possuem embasamento anterior do assunto, tendo uma maior dificuldade de fazer os cálculos necessários.

O propósito de melhorar o desempenho acadêmico dos alunos, aplicando o método de indução em um assunto de ensino médio demonstra-se alcançado, assim mantendo a veracidade das proposições. Este trabalho enfatiza unicamente o assunto de progressão, porém, durante sua realização percebeu-se que a aplicação do método de indução poderia ser utilizado em diversos assuntos de ensino médio, servindo como método chave para um aprofundamento teórico mais eficaz e com grande contribuição acadêmica.

REFERÊNCIAS

ANTAR NETO, A; *et al.* **Progressões e logaritmos**. São Paulo: Moderna, 1979. 257p.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda., 1998.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. V. 2. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. 135p.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos** – 8ª série do ensino fundamental. São Paulo, 2000, 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, março de 1993.

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. **Uma seqüência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais.** 2007. 215f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11504. Acesso em: 18 out. 2019.
IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar 4. 2. ed. São Paulo: Atual, 2006.

JESUS, F. S. **Teorias demográficas:** Malthusiana, Neomalthusiana e Reformista. Disponível em: https://www.geografiaopinativa.com.br/2014/09/teorias-demograficas-malthusiana.html. Acesso em: 17 set. 2019.

LIMA, E. L. I**ndução matemática.** Disponível em: www.obm.org.br/eureka/artigos/inducao.doc. Acesso em: 8 out. 2019.

LIMA, Elon Lages. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOUREIRO, A. A. F. **Sequência e indução matemática**. Disponível em: www.dcc.ufmg.br/loureiro. Acesso em: 10 out. 2019.

MAIA, R. J. D. **Progressões aritméticas e geométricas** [manuscrito]. 2011.

MARTINS, Juliana. **Os "problemas diversão" do papiro matemático rhind: uma análise do texto de Robins & Shute.** 2013. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/698.pdf. Acesso em: 19 out. 2019.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996a. p.65-86.

MOREIRA, L. A. S. **Sustentabilidade ambiental:** avanço ou retrocesso para o desenvolvimento. 2015. 343p

OLIVEIRA, Diego. **Indução Matemática (Indução Fraca).** Disponível em: https://pt.scribd.com/document/250600647/Exercicios-Resolvidos-Inducao-matematica. Acesso em: 15 out. 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov./dez. 2005.

Data do recebimento: 21 de julho de 2019
Data da avaliação: 9 de novembro de 2019
Data de aceite: 12 de dezembro de 2019

1 Acadêmica do curso de licenciatura em matemática – UNIT. Email: flavia.lins@souunit.com.br
2 Acadêmico do curso de licenciatura em matemática – UNIT. Email: julio.csantos@souunit.com.br
3 Acadêmica do curso de licenciatura em matemática – UNIT. Email: nadielza.carvalho@souunit.com.br