APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR NOS MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF PARA OBTENÇÃO DE UM EQUILÍBRIO ECONÔMICO, E O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE TAREFAS PARA MELHOR DISTRIBUIR AS ATIVIDADES

Christopher Porto Melo[1]
José Eduardo da Costa Wynne Neto[2]
Luis Fernando Dantas Gois[3]

Ciências da Computação
cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas
ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

Pretende-se unir dois teoremas famosos, o Problema de Alocação de Tarefas (consiste em distribuir sem ambigüidade tarefas para instalações de maneira otimizada), e os Modelos Econômicos de Leontief (fundamenta-se em analisar as relações econômicas entre empresas ou setores de uma empresa, de modo que haja um equilíbrio), são aplicado métodos da Álgebra Linear para chegar à um resultado: que será o de promover a qualquer tipo de empresa ou negócio, um melhor gerenciamento e tomada de ideias para conquistar o menor custo de investimento com a maior otimização possível. Usaremos uma empresa de transportes ferroviários como exemplo, onde a mesma pretende reduzir os custos de forma que a sua eficiência no atendimento ao cliente não diminua, e que seja possível produzir para uma demanda externa pré-determinada, de modo que a rentabilidade seja equilibrada. Utilizando os conceitos da estatística para representar os gráficos, será possível observar os dados recolhidos da empresa e os resultados obtidos após as aplicações dos métodos. Logo, com a essência de aperfeiçoar o gerenciamento de tarefas vindo da primeira teoria e com uma verificação de rentabilidade por Leontief, tentará ser obtido um resultado plausível ao mesclar os dois teoremas em um mesmo ambiente.

PALAVRAS – CHAVE

Modelos Econômicos de Leontief, Álgebra Linear, Estatística.

ABSTRACT

It is intended to join two famous theorems, the Task Allocation Problem (consists of unambiguously allocating tasks to facilities optimally), and Leontief Economic Models (based on analyzing the economic relations between companies or sectors of a company, so that there is a balance), methods of Linear Algebra are applied to arrive at a result: that will be to promote any type of company or business, better management and taking ideas to achieve the lowest cost of investment with the highest optimization possible. We will use a rail transport company as an example where it aims to reduce costs so that its efficiency in customer service does not decrease and that it is possible to produce for a predetermined external demand, so that the profitability is balanced. Using the concepts of statistics to represent the graphs, it will be possible to observe the collected data of the company and the results obtained after the applications of the methods. Therefore, with the essence of perfecting task management from the first theory and with a profitability check by Leontief, it will try to obtain a plausible result by merging the two theorems in the same environment.

KEYWORDS

Leontief Economic Models. Linear Algebra. Statistics.

1 INTRODUÇÃO

Ao decorrer dos anos, desde a época do período antigo até a idade contemporânea, o homem passou a acarretar diversos trabalhos e reponsabilidades, com os quais, cada vez mais se viam a necessidade de organização e divisão de tarefas, pois sua complexidade tendia a ser maior à cada geração, as atividades que tínhamos incumbência de realizar em nossos trabalhos também se tornavam cada vez mais profundas, complicadas e mais numerosas, o que leva à necessidade de maior eficiência em soluções e decisões, tanto em tempo utilizado, quanto em qualidade. Desde a preocupação inicial, em gerenciar seus bens domésticos e manipular seus trabalhos de fins agrícolas, havia a necessidade de dividir tarefas entre e fazer com que não houvesse perdas na parte de lucratividade.

Esse problema é visto em todos os períodos históricos, (período das antigas Grécia e Roma, período Feudal, monárquico, renascentista etc.), como também não está ausente nos tempos atuais. Qualquer homem que inicie seu negócio, ou entre em alguma empresa ou em qualquer sistema coorporativo, logo percebe a dificuldade que se tem para manter o sistema fluido na questão de gerenciamento de tarefas, cada funcionário ou setor se vê presente de comprometimentos e autoria de trabalhos que formam uma pequena parte do corpo estrutural do negócio, e, todos eles juntos formam um belo sistema corporativo, no qual há um requerimento lógico para seu funcionamento e harmonia.

Para a coordenação desse sistema lógico, podemos nos usufruir da utilização de teoremas, compostos de propostas e fórmulas para o melhor comando de nossas ações e manutenção dos sistemas para aumentar a produtividade. Um deles, é o Problema de alocação de Tarefas, o qual já é um problema bastante conhecido no meio científico, principalmente para profissionais da área de Matemática e Computação. Isto é comprovado pela presença de não somente artigos, mas seções destinadas ao problema em livros.

Este tipo de problema é encontrado com frequência nas mais diversas áreas, como por exemplo, na administração de uma empresa, escola, ou qualquer outro sistema coorporativo. Alguns desses casos pertencem à classe de problemas da área de Otimização Combinatória, classe à qual o Problema de Alocação pertence. O Problema de Alocação é, portanto, encontrado com muita frequência no mundo real, podendo ser aplicado praticamente em várias áreas do conhecimento humano. Porém, sua generalização é um problema que se enquadra na categoria dos problemas NP-Difíceis (problemas intratáveis, aqueles no qual a solução é de certa forma existente, mas, para nela chegar, há um caminho longo, podendo não ser resolvido em um tempo de determinação plausível) , ou seja, é difícil de se encontrar uma solução ótima para ele em tempo hábil, variando conforme o seu tamanho, podendo durar minutos, horas, dias ou mais que semanas.

Este problema pode ser nomeado, também, como designação, *matching*, emparelhamento, dentre outros nomes, constitui uma parte importante da Ciência da Computação e Matemática, com aplicação prática direta. Em um problema deste tipo, tem-se dois conjuntos, agentes-tarefas, trabalhadores-empregos, entre outros exemplos, e deve-se encontrar uma função que ligue elementos destes dois conjuntos. Pode haver, na maioria dos casos há, restrições e requisitos para a ligação de um par de elementos, constituindo um custo para a designação. E o problema está em encontrar a função que minimiza o custo somado de todas as alocações, respeitando as restrições existentes

Outros teoremas cuja utilização também é viável, são os modelos econômicos de Leontief, criado pelo russo Wassily Leontief (1905-1999), ao qual foi concedido o Prémio Nobel das Ciências Económicas em 1973, ao adotar à economia contemporânea uma teoria onde a Álgebra Linear se encontra por trás. Nos alicerces desta teoria, composta por dois modelos econômicos, encontramos princípios que nos são conhecidos e constituem a base da presente unidade curricular, o cálculo de matrizes como instrumento para resolver sistemas lineares.

Os dois modelos que constituem a presente teoria, nomeadamente, o modelo fechado ou *input-output* e o modelo aberto, apesar de diferentes apresentam o mesmo fim: a análise das relações econômicas entre diferentes tipos de indústrias com o fim de determinar um ponto de equilíbrio que permita satisfazer simultaneamente a oferta e a procura. Deste modo, os referidos modelos tornam-se primordiais na previsão do impacto de determinadas mudanças econômicas num dado setor da economia sobre os restantes.

O modelo fechado ou *input-output,* como a própria designação indica, adota a igualdade entre o valor das despesas de cada indústria e o valor das suas receitas como fator de determinação na garantia do equilíbrio de um sistema econômico constituído por um número finito de indústrias. Assim, este modelo econômico será utilizado com o intuito de determinar o valor que uma indústria deve cobrar pela venda de um bem ou serviço, de modo a que as despesas e receitas se igualem.

A presente empresa de transportes ferroviários que será tratada no artigo, sentiu a necessidade de adaptar suas tarefas de modo que sejam mais bem distribuídas, atingindo assim uma redução de custos. Ela utiliza um cálculo próprio para determinar o custo de cada entrega e o funcionário escolhido para cumprir a função (entrega) implica no gasto obtido, ou seja, cada funcionário tem um valor para desempenhar uma entrega. A aplicação do método será diretamente nesses gastos, assim há uma necessidade de utilizar o Problema de Alocação de Tarefas, de modo que o custo final seja o menor possível, e todas as tarefas sejam cumpridas.

Nos setores da empresa, existe uma "troca de produção", ou seja, esses setores produziram para cada um e necessita da produção desses outros para produzir, de modo que haja um equilíbrio econômico, assim os gastos e os ganhos devem ser os mesmos. Porém, há uma necessidade de satisfazer uma demanda externa, então além de produzir para própria empresa, será essencial produzir para fora. Por isso a aplicação dos Modelos Econômicos de Leontief, a ideia é verificar se essa empresa é produtiva e se é possível atender a essa demanda externa, de maneira que ela esteja economicamente equilibrada.

2 APLICAÇÃO DO PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE TAREFAS

Esse problema requisita que o número de instalações e tarefas sejam o mesmo. Representando esse número por **n**, teremos **n**! maneiras distintas de alocar tarefas às instalações, ou seja, há n maneiras de alocar a primeira tarefa, (**n** - 1) de alocar a segunda tarefa, (**n** - 2) maneiras de alocar a terceira tarefa, indo mais adiante (**n** - k). Concluindo **n**.(**n** - 1).(**n** - 2). ... . 3.2.1 = **n**! maneiras de alocar tarefas, encontrando assim uma que é ótima em algum sentido.

Podemos representar, dado um problema para designar seu custo-mínimo, de forma matricial. Dessa forma, podemos definir: "Dada uma matriz-custo C de ordem **n**, uma alocação de tarefas é um conjunto de **n** entradas da matriz tais que não há duas da mesma linha ou coluna". Para obter uma alocação ótima, a soma das suas entradas deve resultar no menor custo.

Como já foi falado, o problema da alocação de tarefas se resume em distribuir as tarefas de tal forma que a duração e o custo diminuam, ou seja, objetivando uma economia de tempo/dinheiro. Dando um exemplo de uma empresa de transporte, o gerente necessita distribuir **n** unidades de frota de ônibus para **n** unidades de locais, podemos atribuir esses locais como Terminais Rodoviários. Sendo **Cij** a distância em quilômetros entre **ai-ésima** frota de ônibus e o **j**-ésimoterminal. Obtemos uma alocação ótima aquela cuja soma da distância entre o ônibus e o terminal seja a menor.

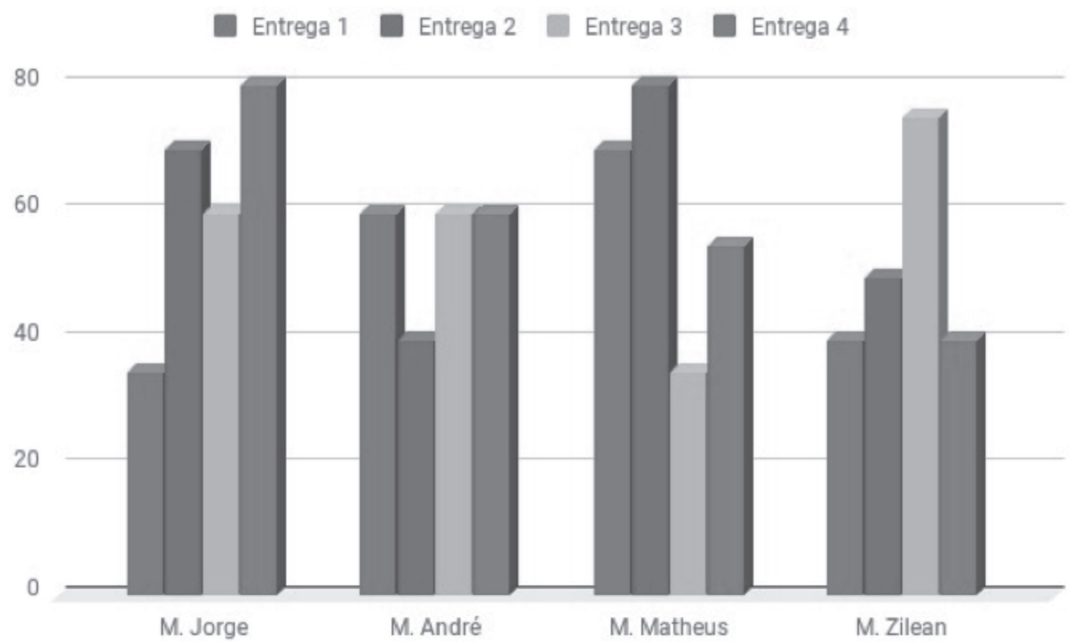
Em uma empresa especializada em transporte ferroviário, o gerente pediu ao seu supervisor para fazer uma inspeção geral no setor de produção, composto pelos maquinistas, no dia a dia de trabalho, e, também na demanda em que os três setores principais da empresa estavam realizando entre si. Após o reconhecimento do trabalho feito pelos maquinistas, o supervisor percebeu que havia um desfoque na divisão de quatro entregas entre os quatro principais trabalhadores da área de produção, sendo que o orçamento máximo que a empresa tem para bancar as entregas é de R$150.000,00. O supervisor tinha o papel de informar qual era a melhor opção de designação para as entregas, com seus preços descritos na tabela abaixo:

Tabela 1

	Entrega 1	**Entrega 2**	**Entrega 3**	**Entrega 4**
M. Jorge	35	70	60	80
M. André	60	40	60	60
M. Matheus	70	80	35	55
M. Zilean	40	50	75	40

Fonte: Próprios autores

(Os valores apresentados estão na casa dos milhares)



Fonte: Próprios autores
(Apresentação dos dados da Tabela 1 em Vertical Bar Charts)

Para qual maquinista será dada a responsabilidade de uma determinada entrega de forma que a soma dos dados resulte em uma boa alocação, ou seja, o menor custo possível?

Primeiramente, escrevemos a matriz-custo correspondente ao problema proposto:

35	70	60	80
60	40	60	60
70	80	35	55
40	50	75	40

Como foi falo, temos **n**! maneiras distintas de alocar tarefas, logo, serão **4**! de alocações possíveis.

1º Passo - Escolher o menor número de cada linha;

Temos: **35** – Linha 1; **40** – Linha 2; **35** – Linha 3; **40** – Linha 4

Em seguida, subtraímos cada número com sua respectiva linha e obtemos:

0	35	25	45
20	0	20	20
35	45	0	20
0	10	35	0

2º Passo - Escolher o menor número de cada coluna da nova tabela;

Temos: **0** – Coluna 1; **0** – Coluna 2; **0** – Coluna 3; **0** – coluna 4;

Em seguida, subtraímos cada número com sua respectiva coluna e obtemos;

0	35	25	45
20	0	20	20
35	45	0	20
0	10	35	0

3º Passo - Riscar um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo fiquem riscadas. Isso quer dizer que, como o maquinista já entregou em um local, então ele não pode entregar nos outros locais.

$\boxed{0}$	35	25	45
20	$\boxed{0}$	20	20
35	45	$\boxed{0}$	20
0	10	35	$\boxed{0}$

Percebe-se que obtemos de imediato uma resposta, não precisando aplicar outros comandos. Isso só foi possível, porque a matriz obteve uma alocação ótima de zeros. Podemos concluir que:

M. Jorge, na Entrega 1 – (R$ 35.000,00)
M. André, na Entrega 2 – (R$ 40.000,00)
M. Matheus, na Entrega 3 – (R$ 35.000,00)
M. Zilean, na Entrega 4 – (R$ 40.000,00)
(Apresentação dos resultados obtidos em Vertical Bar Charts após a aplicação do método).

Logo, a soma das distâncias são R$150.000,00, o que corresponde ao menor custo possível da distância.

3 APLICAÇÃO DO MODELO ECONÔMICO DE LEONTIEF

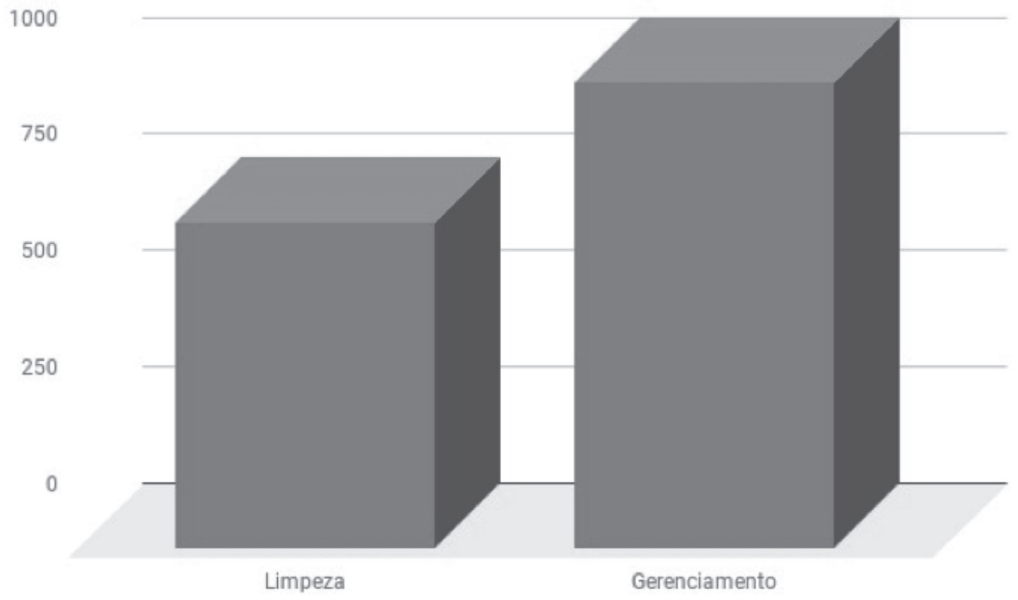
O modelo aplicado, consiste em representar correlação entre diversos setores de uma economia, seja ela nacional ou regional. Esse modelo mostra relações Intersetoriais em uma economia, apresentando como a produção de um setor pode se tornar o insumo de outro setor.

Com relação à demanda entre os setores principais, o supervisor analisou os setores de produção (composto pelos transportadores ferroviários), o setor de gerenciamento do mapa viário, e por último, o setor de manutenção das vias e limpeza das estações. Sua averiguação mostrou ao gerente as seguintes dependências Inter setoriais com relação ao custo:

Tabela 2

	Demanda exigida pelo(a)			**Custo Total**
	Limpeza	**Gerenciamento**	**Demanda**	
Limpeza	400	100	200	700
Gerenciamento	300	300	400	1000

Fonte: Próprios autores.



(Apresentação dos dados da Tabela 2 referentes ao Custo Total da produção da empresa)

Primeiramente definimos os vetores de consumo **c1** e **c2**

Para obter um custo total de 700 unidades (monetárias) e 1000 unidades (monetárias), a Demanda necessitará de 200 unidades da Limpeza e 400 unidades do setor de Gerenciamento respectivamente.

400/700
300/700

c1

100/1000
300/1000

c2

Então obtemos a matriz **C** de consumo:

0,57	0,1
0,42	0,3

O equilíbrio entre o nível de produção e a demanda total é formado por **x = Cx + d,** sendo **x** o vetor de produção, **d** o vetor da demanda e **C** a matriz de consumo. Colocando o xem evidência, concluímos:

$$(I - C) * x = d$$

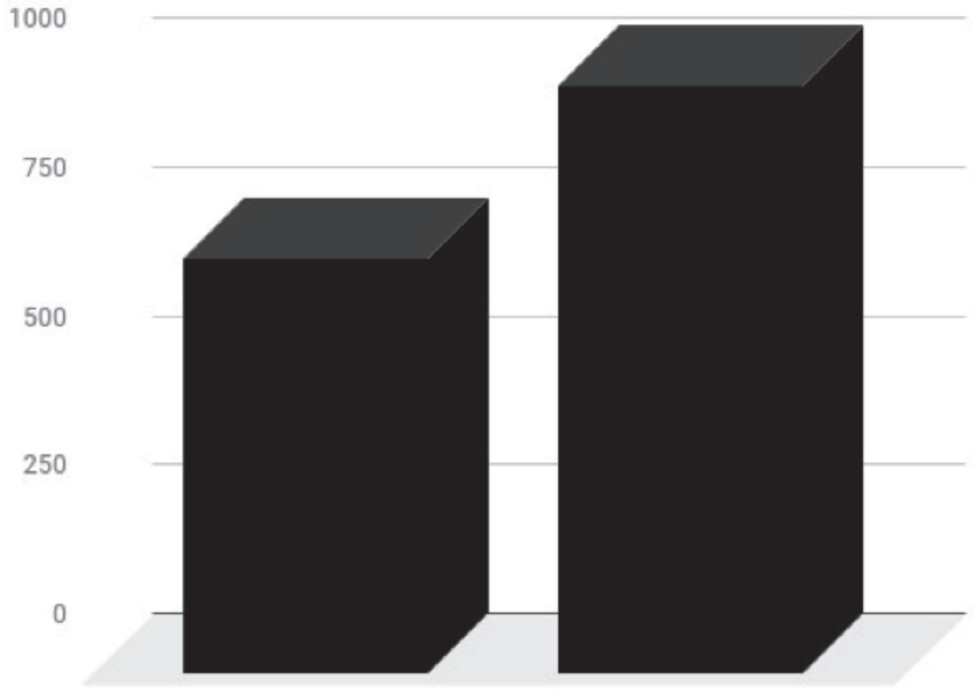
(Sendo **I** a matriz identidade de ordem n)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}57 & 0{,}1 \\ 0{,}42 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Tendo uma demanda final de 200 unidades (monetárias) para limpeza e 400 unidades (monetárias) para o gerenciamento de mapa viário, encontramos o vetor de produção que satisfaz esta demanda da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0{,}43 & -0{,}1 \\ -0{,}42 & 0{,}7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Obtemos uma solução **x** [696, 989]. Logo, o setor de limpeza deverá produzir aproximadamente 696 unidades e o setor de gerenciamento 989 unidades. Temos que com esse resultado, é possível notar a proximidade entre o Custo Total (gasto total da empresa para produzir) e o que realmente ela deve gastar (solução x) para manter um equilíbrio econômico.



(Apresentação do resultado obtido referente a "solução x" após aplicação do método).

Seja a matriz de consumo C do exemplo anterior,

0,57	0,1
0,42	0,3

As duas somas de colunas dessa matriz são todas menores do que 1, portanto a empresa é lucrativa. Então, a matriz de consumo **C** é produtiva.

4 CONCLUSÕES

Tanto os modelos econômicos de Leontief quanto o problema de alocação de tarefas, apresentam ótimas soluções sozinhos, contudo, ao aplicar ambos em um sistema empresarial, utilizando como base para a alocação os dados referentes ao setor de produção, verificando com o método de Leontief a relação de custos entre os demais setores, usando também a demanda exigida pelo primeiro, podemos chegar a um resultado economicamente melhor para a corporação. Como visto no exemplo, ao aplicar o modelo econômico estudado, verificamos que a economia interna da empresa está em equilíbrio o que poderia não ocorrer.

Foi possível também observar que a matemática nos auxilia a resolver problemas complexos, porém, por várias vezes encontramos resultados e dados complexos, dificultando assim melhor interpretá-lo. Com o auxílio da estatística foi possível organizar os resultados, facilitando assim a interpretação dos valores que obtivemos. O que nos leva a concluir o quão importante se tornou a estatística para o muito moderno, onde os problemas são cada vez mais complexos e devem ter resoluções cada vez mais simples de serem entendidas.

REFERÊNCIAS

Álgebra Linear: Modelos Econômicos de Leontief. Disponível em: https://www.cin.ufpe.br/~vak/grad/leontief.ppt. Acesso em: maio 2019.

CANINA, Thaís. Álgebra Linear aplicada a Modelos Econômicos de Leontief. Escola de Economia de São Paulo – EESP – FGV, 22 de junho de 2011, **Ebah**. Disponível em: https://www.ebah.com.br/content/ABAAAeoFYAD/algebra-linear-aplicada-a-modelos-economicos-leontief. Acesso em: maio 2019.

SOARES, Henrique Carvalho de Almeida. **Um estudo sobre o Problema de Alocação**. 2011. 72f. TCC (Graduação) – UNIFESP – Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos – SP, dezembro, 2011. Disponível em: https://www.ft.unicamp.br/docentes/meira/publicacoes/2011henrique.pdf. Acesso em: maio 2019.

THALENBERG, Bruna; PICCHETTI, Pedro. **Modelagem matemática da economia e o modelo insumo-produto de Leontief**. 2017. 34f. Trabalho Final – Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, Departamento de Matemática Aplicada, São Paulo, 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~bruna/dump/modelagem/leontief.pdf. Acesso em: maio 2019.

Data do recebimento: 21 de julho de 2016
Data da avaliação: 9 de novembro de 2016
Data de aceite: 12 de dezembro de 2017

1 Graduando em Ciências da Computação – UNIT. E-mail: christopher.porto@souunit.com.br
2 Graduando em Ciências da Computação – UNIT. E-mail: jose.wynne@souunit.com.br
3 Graduando em Ciências da Computação – UNIT. E-mail: luis.fdantas@souunit.com.br