

EFEITOS NÃO-LINEARES LIGADOS À QUEDA DA PONTE DE TACOMA NARROWS

Allyson S. Rodrigues¹
Matheus M. G. Mergulhão²
Thiago C. Oliveira³
Aislan primo⁴
Maria Anita s. S. De Mendonça⁵



Engenharia Civil

ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

O presente projeto de pesquisa relata sobre o desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows em 1940. Estudos feitos na época do desmoronamento mostram que o colapso da ponte foi causado por efeitos lineares. Um dos efeitos provocados pelos fortes ventos foi à ressonância que provocou grandes amplitudes de vibrações, fazendo com que a estrutura viesse ao chão. Novos estudos comprovam que efeitos não lineares foram os causadores do desabamento. A pesquisa de caráter bibliográfico se aprofunda na investigação sobre teses e artigos elaborados nos últimos anos e presentes em bancos de dados como bibliotecas (UNIT, Pública, UFS, IFS), dentre outros, a fim de apresentar as justificativas de tais hipóteses.

PALAVRAS-CHAVE:

Causadores. Desmoronamento. Efeitos. Hipóteses. Investigação.

ABSTRACT

This researching Project is about the Tacoma Narrows bridge collapse in 1940. Studies were made that year and shows the case of collapsing was nonlinear. Hard winds caused resonance that created big wavelength of vibration, making the structure fall to the

ground. New studies prove that nonlinear effects had caused the collapse. The research of bibliographic character has the intention in the investigation about theses and articles made in recent years and in database like library (Unit, Public, UFS, IFS), among others, in order to show justification of theses hypotheses.

KEYWORDS:

Causers. Collapse. Effects. Investigation and Hypotheses.

1 INTRODUÇÃO

Equação diferencial é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida (a incógnita da equação) [5].

Em 1938 foram iniciadas as obras de construção da ponte pênsil Tacoma Narrows. Dez anos antes, “em 1928, a Câmara de Comércio da cidade de Tacoma, estado de Washington, EUA, inicia o estudo de viabilidade técnica, no que se concerne à construção duma ponte, de Tacoma até a península GigHarbor. Seus mentores foram Clark H. Eldridge, engenheiro de pontes, e Lacey V. Murrow, engenheiro-chefe.

Com o engenheiro Eldridge, a construção ficou orçada, inicialmente, em US\$ 11 milhões. Devido à Grande Depressão de 1929, os setores públicos *Washington State Department of Transportations e Federal Public Works Administration* solicitaram sua revisão para fins de reduzir custos da obra” (CAVALCANTI, 2015, p. 23). Eldridge, por sua vez, não concordando com o fato de ter que cortar gastos na construção da ponte, resolveu deixar o projeto, dessa forma, assumindo o seu lugar, o engenheiro renomado Leon S. Moisseiff apresentando um orçamento de US\$ 7 milhões.

Durante sua construção, técnicos já percebiam que durante ventos não tão intensos, a estrutura da ponte oscilava transversalmente. Inaugurada e aberta ao tráfego rodoviário em 1940, pela sua peculiaridade, logo se tornou atração turística. O que para os engenheiros era um verdadeiro horror estrutural, para as demais pessoas deveria ser um prazer indescritível dirigir ou observar uma grande estrutura como se estivesse numa montanha-russa (CAVALCANTI, 2015). Em 7 de novembro de 1940, apenas alguns meses após a inauguração houve o colapso da ponte, após um vento de aproximadamente 65km/s atingir a sua estrutura.

Justifica-se a escolha do tema ao observar que ainda hoje existem dúvidas com relação às causas que levaram ao desabamento da Ponte de Tacoma Narrows (FIGURA 1), levando em consideração que existem duas teorias relevantes. Dessa forma, havendo a necessidade de se apresentar a causa mais consistente, tendo em vista a análise mais realística dos fenômenos envolvidos, assim, tendo como objetivo mostrar como os efeitos não-lineares estão relacionados à causa da queda da ponte, além de apresentar a importância das equações diferenciais na resolução de problemas relacionados à construção civil.

Figura 1 – Ponte de Tacoma após desabamento



Fonte: <http://www.tacomannarrowsbridge.org/photos1940.html>

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para essa pesquisa foi usado o método qualitativo. Utilizou-se como instrumento artigos, pesquisas e sites com informações referentes ao assunto aqui apresentado.

Foi realizado um estudo com o interesse de encontrar o real motivo da queda da ponte de Tacoma. Neste estudo duas teses foram expostas, a de ressonância e a de efeitos não-lineares. A primeira “afirmava que o vento era separado pela parte lateral da ponte que acarreta a formação de vórtices na parte contrária a incidência, implicando força na direção vertical com a mesma frequência das produzidas pela ponte” (SOARES, 2012, p. 35). Em 1990 essa hipótese foi descartada, quando Lazer e McKenna (1990) publicaram o artigo *Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis*.

Nesta pesquisa, ficou claro que a ressonância não poderia ser a causa principal do desabamento, já que dependeria de uma frequência natural que não havia na localidade, juntamente com alguma frequência externa, e sendo a ressonância um fenômeno linear, não poderia ocorrer exatamente pela falta de ventos constantes e com a mesma velocidade.

Uma segunda hipótese e a mais contundente é a que trata dos efeitos não-lineares e suas interações com os fatores externos (ventos). Quando houve oscilações ocasionadas por forças externas, os cabos de aço não estariam sempre sob tensão, havendo assim somente a força da gravidade, e segundo Lazer-McKenna, a não linearidade estava no fato de que vários cabos diferentes poderiam estar sob tensão em momentos diferentes um do outro. Isso levaria a oscilações de grande amplitude, considerando principalmente os fatores externos moderados (CAVALCANTI, 2015). Dessa forma, com a junção desses fatores (não linearidade dos cabos de aço e ventos moderados), a ponte chegou a desabar em 7 de novembro de 1940, apenas alguns meses após sua inauguração.

3 ANÁLISE TEÓRICA

Os resultados experimentais descritos em um relatório (1942) indicaram definitivamente que os movimentos foram resultado do surgimento de vórtices.

Por ser uma estrutura longa, estreita, rasa e, portanto, muito flexível e seu suporte de rigidez era uma viga contínua, que, combinada com um assoalho contínuo, produziram uma seção transversal particularmente vulnerável aos efeitos aerodinâmicos (GIES, 1963).

A instabilidade aerodinâmica também foi responsável pelo fracasso da Ponte Tacoma Narrows em 1940. A magnitude das oscilações depende da forma da estrutura, da frequência natural e do amortecimento. Oscilações são causadas pelo surgimento periódico de vórtices no lado do sota-vento. Os vórtices surgiram primeiro na seção superior e, em seguida, na seção inferior (SONS, ANO).

Por meio de equações diferenciais lineares de segunda ordem, será demonstrado que os efeitos não lineares foram os causadores do colapso que levou à ponte ao chão.

4 EQUAÇÕES LINEARES QUE REGEM OS CABOS (ESTÁTICOS)

Para o estudo do movimento da ponte de Tacoma, precisaremos apenas das equações diferenciais de segunda ordem. Assim, esta seção destina-se a analisar a solução dessas equações. Considere, então, a seguinte equação linear de segunda ordem:

$$P_0(t) \frac{d^2y}{dt^2} + P_1(t) \frac{dy}{dt} + P_2(t)y = Q(t). \quad (9)$$

Ao analisar o caso em que essa equação é homogênea, ou seja, $Q(t) = 0$ e que as funções P_0 , P_1 e P_2 são constantes, (9) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad (10)$$

onde os coeficientes a ; b e c são reais e arbitrários, com $a \neq 0$, procurando uma solução exponencial para (10), suponha que ela seja da forma $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue então que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo y , y' e y'' em (10), obtém-se

$$(ar^2 + br + c) e^{rt} = 0$$

Como, $e^{rt} \neq 0$

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (11)$$

A equação (11) é chamada de equação característica da equação diferencial (10). Como (11) é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas. Vamos proceder à análise de cada caso.

5 RAÍZES REAIS

Suponha que as raízes da equação característica (11) sejam reais, distintas e denotadas por r_1 e r_2 . Então,

$$y_1(t) = e^{r_1 t}; y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções da equação (11). Portanto, pela Proposição 2.4, segue que a combinação linear das mesmas também é solução. Assim,

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (12)$$

é uma solução de (11). Agora, para encontrar as constantes c_1 e c_2 , avaliemos (12) nas condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$$

Fazendo $t = t_0$ e $y = y_0$ em (12), tem-se que

$$c_1 e^{(r_1 t_0)} + c_2 e^{(r_2 t_0)} = y_0 \quad (13)$$

Analogamente, fazendo $t = t_0$ e $y' = y'_0$ em $y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$, obtém-se que

$$c_1 r_1 e^{(r_1 t_0)} + c_2 r_2 e^{(r_2 t_0)} = y'_0 \quad (14)$$

Resolvendo simultaneamente (13) e (14) para c_1 e c_2 , encontra-se

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0} \\ c_2 &= \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0} \end{aligned} \quad (15)$$

Como $r_1 - r_2 \neq 0$, as equações em (15) sempre fazem sentido. Independentemente dos valores de t_0, y_0 e y'_0 dados, sempre será possível determinar c_1 e c_2 de modo que as condições iniciais sejam atendidas e, pelo teorema da existência e unicidade, há apenas uma escolha possível de c_1 e c_2 para cada conjunto dado de condições iniciais. Com os valores de c_1 e c_2 dados por (15), a expressão (12) é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

6 RAÍZES COMPLEXAS

Ao supor que $\Delta = b^2 - 4ac$ seja negativo, então, as raízes da equação (11) são números complexos, que serão denotadas por

$$r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu, \quad (16)$$

onde λ e μ são números reais. As expressões para y são:

$$y_1(t) = e^{(\lambda + i\mu)t}, y_2(t) = e^{(\lambda - i\mu)t}. \quad (17)$$

Para que as expressões descritas em (17) estejam coerentes, é preciso definir a função exponencial complexa. É necessário que a definição seja reduzida à função exponencial real quando o expoente for real.

O cálculo da série de Taylor para e^t em torno de $t = 0$ é dado por:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, t \in \mathbb{R} \quad (18)$$

Substituindo t por it na equação (18), temos:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (19)$$

Onde a soma foi separada em duas partes, real e imaginária, usando o fato que $i^{2n} = (-1)^n$ e $i^{2n+1} = (-1)^n i$, para $n \geq 0$, onde n é um número natural. A primeira série na equação (19) é a série de Taylor para $\cos(t)$ em torno de $t = 0$ e a outra é a série de Taylor para $\sin(t)$ em torno de $t = 0$. Daí:

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t). \quad (20)$$

A equação (20) é conhecida como fórmula de Euler que pode ser usada para números complexos da mesma forma que para números reais da variável independente, a equação (20) será adotada como definição de e^{it} .

Neste caso específico, deseja-se estender a definição de exponencial complexa para expoentes complexos arbitrários da forma $(\lambda + i\mu)t$. Como é interessante que as propriedades usuais da função exponencial continuem válidas para expoentes complexos, então deseja-se que

$e^{(\lambda+i\mu)t}$ satisfaça

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}. \quad (21)$$

Usando a equação (20), obtém-se:

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)) = e^{\lambda t} \cos(\mu t) + i e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad (22)$$

Com as definições (20) e (22), podemos dizer que as regras de exponenciação são válidas para a função exponencial complexa e que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt}$$

é válida para valores complexos de r .

As funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, dadas por (17), com o significado expresso pela equação (22), são soluções de (10) quando as raízes da equação característica são números complexos $\lambda \pm i\mu$. As soluções dadas por $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são funções com valores complexos e são preferíveis soluções com valores reais, uma vez que a própria equação diferencial possui apenas valores reais. Dessa forma, pode-se usar o Teorema 2.4 para encontrá-las. Fazendo a soma e a diferença de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, temos

$$y_1(t) + y_2(t) = e^{\lambda t}(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)) + e^{\lambda t}(\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)) = 2e^{\lambda t}(\cos(\mu t)),$$

$$y_1(t) - y_2(t) = e^{\lambda t}(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)) - e^{\lambda t}(\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)) = 2ie^{\lambda t}(\sin(\mu t)).$$

Desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, obtém-se um par de soluções reais

$$u(t) = e^{\lambda t}(\cos(\mu t)), \quad v(t) = e^{\lambda t}(\sin(\mu t)).$$

Podemos perceber que u e v são simplesmente as partes real e imaginária, respectivamente, de y_1 e y_2 e que $W(u,v)(t) = \mu e^{2\lambda t}$, ou seja, desde que $\mu \neq 0$, o wronskiano W não é nulo, então u e v formam um conjunto fundamental de soluções. Se $\mu = 0$, as raízes são reais e iguais, portanto a discussão dessa seção não se aplica a este caso. Em consequência, se as raízes da equação característica são números complexos $\lambda \pm i\mu$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da equação (10) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t), \quad (23)$$

Onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

7 RAÍZES IGUAIS ($R_1=R_2$)

Será analisada a possibilidade das duas raízes, r_1 e r_2 , serem iguais, que ocorre quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Então, segue da fórmula de Bhaskara que

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} \quad (24)$$

Gerando raízes iguais para a solução da equação (10), sabendo,

$$y_1(t) = e\left(-\frac{bt}{2a}\right) \quad (25)$$

e, neste caso específico, não é simples encontrar diretamente a segunda solução. O método mostrado nessa seção é o descoberto por D'Alembert no século XVIII e usando o fato de que, se $y_1(t)$ é uma solução de (10), então $cy_1(t)$ também o é para qualquer constante c . Essa observação será generalizada, substituindo-se c por $v(t)$ e depois determinando $v(t)$ de modo que o produto $v(t)y_1(t)$ seja solução da equação (10).

Suponha que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (26)$$

e, substituindo na equação (10) para determinar $v(t)$, tem-se

$$y' = e^{-\frac{bt}{2a}} \left(v'(t) - \frac{b}{2a} v(t) \right) \quad (27)$$

e

$$y'' = e^{-\frac{bt}{2a}} \left(v''(t) - \frac{b}{a} v'(t) + \frac{b^2}{4a^2} v(t) \right) \quad (28)$$

Substituindo na equação (10),

$$\left[a \left(v''(t) - \frac{b}{a} v'(t) + \frac{b^2}{4a^2} v(t) \right) + b \left(v'(t) - \frac{b}{2a} v(t) \right) + cv(t) \right] e^{-\frac{bt}{2a}} = 0 \quad (29)$$

Como $ce^{-\frac{bt}{2a}}$ nunca se anula, pode-se desconsiderá-la; ao reorganizar os termos restantes, obtém-se

$$av''(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v(t) = 0. \quad (30)$$

Como a parte envolvendo $v''(t)$ é nula e o coeficiente de $v(t)$, $c - \frac{b^2}{4a}$, também é zero, (30) se reduz a $v''(t) = 0$,

logo,

$$v(t) = c_1 t + c_2$$

Portanto, de (26) tem-se

$$y = c_1 t e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (31)$$

Percebe-se que y é uma combinação linear de duas soluções

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}, y_2(t) = t e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (32)$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (33)$$

Como $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula, as soluções y_1 e y_2 dadas por (32) formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, (31) é a solução geral de (10) quando as raízes da equação característica são iguais.

Voltemos ao caso não homogêneo da equação (9). A solução geral de qualquer equação não homogênea de segunda ordem pode ser obtida a partir de duas soluções linearmente independentes da sua parte homogênea.

Teorema: Considerando a equação (9) e supondo que P_1, P_2, P_3 e Q sejam funções contínuas, tem-se que qualquer solução y desta equação é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \phi(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a parte homogênea e ϕ é uma solução particular de (9).

Existem inúmeros métodos para se obter a solução particular da equação não homogênea. O que foi descrito é o método dos coeficientes indeterminados. Tal método só funciona para as funções Q da equação (9) que assumem a forma constante, polinomial, exponencial, seno, cosseno ou soma e produto destas funções. Para obter a solução basta seguir duas regras:

1. Se $Q(t)$ possui forma pertencente à coluna da esquerda da tabela ou se pode ser obtida por meio de soma e produto, a solução particular da forma correspondente está na coluna da direita da tabela.

Tabela 1 – Esquema de soluções para o método dos coeficientes indeterminados

$r(t)$	Solução a experimentar
$Ae^{\beta t}$	$\alpha e^{\beta t}$
$A\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$
$\alpha(\beta \neq 0)$	a
$\alpha + \beta t$	$a + bt$
$\alpha + \beta t + \gamma t^2$	$a + bt + ct^2$
$\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$	$a + bt + ct^2 + dt^3$
...	...

Fonte: Alves

2. Se $Q(t)$ contém termos que duplicam qualquer solução da equação homogênea, então cada um de tais termos deve ser multiplicado por t^n , n é o menor número natural que elimina a duplicação.

Exemplo 1: Resolva o problema de valor inicial $x'' = -x + 2t + 6\cos t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

Solução: A equação homogênea correspondente é $x'' + x = 0$ e a solução geral é $c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Logo, de acordo com a tabela, $r(t) = 2t + 6\cos(t)$. Todavia, a solução da equação homogênea já inclui $\cos(t)$, então é preciso analisar uma solução particular da forma

$$\phi(t) = at\cos(t) + bt\sin(t) + c + d,$$

onde a, b, c, d são constantes a ser determinadas. Substituindo $\phi(t)$ e $\phi''(t) = (2b - at)\cos(t) - (2a + bt)\sin(t)$ na equação dada, obtém-se $c + (d - 2)t + 2(b - 3)\cos(t) - 2a\sin(t) = 0$,

que resolvida retorna $a = 0, b = 3, c = 0, d = 2$. Assim, uma solução particular é dada por $\phi(t) = 2t + 3t\sin(t)$ e sua solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + 2t + 3t\sin(t).$$

A solução ϕ do problema de valor inicial é dada usando as condições iniciais e obtendo-se

$$1 = x(0) = c_1 \text{ e } 1 = x'(0) = c_2 + 2. \text{ Daí, } c_1 = 1, \quad c_2 = -1 \text{ e}$$

$$\phi(t) = \cos(t) + (3t - 1)\sin(t) + 2t.$$

8 OSCILADORES HARMÔNICOS

Movimento harmônico simples, trata-se de um movimento periódico e oscilatório, ou seja, um movimento oscilatório é todo movimento que uma mesma situação se repete em intervalos de tempos iguais. Quando aplicada uma força sobre o corpo, esticando ou comprimindo a mola, e em seguida soltando, a massa começa a executar um MHS cujo período vale T . Supondo que não haja forças dissipativas, o valor x do deslocamento efetuado é chamado de amplitude do MHS. A trajetória retilínea do corpo é orientada.

Para o caso de osciladores amortecidos, considere um sistema massa-mola na posição de equilíbrio sem um peso e depois com um bloco pendurado na extremidade da mola, como mostra a Figura a seguir:

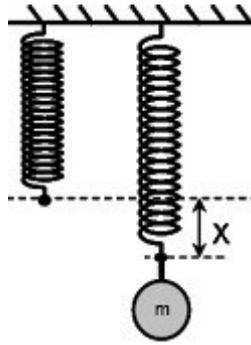
O diagrama de corpo livre do bloco indica que, compensando a força peso do bloco há a força restauradora da mola e uma força de atrito. Sendo $k > 0$ a constante elástica da mola, temos que equilibrando as forças na vertical, concluímos que

$$\sum y = 0 \rightarrow -ky + mg = 0 \rightarrow k = \frac{mg}{y} \quad (34)$$

Assim, encontramos a constante elástica da mola k .

Ao considerar que essa definição pode ser estendida para qualquer material que obedeça à Lei de Hooke, considere as seguintes afirmações:

Figura 1 – Sistema massa-mola.



Fonte: [5].

Se $y < 0$, a situação está abaixo do equilíbrio;

Se $y > 0$, a situação está acima do equilíbrio;

A força de resistência devido ao atrito interno é proporcional à velocidade do movimento, ou seja, $F_a = -\nu y^0$, $\nu > 0$, é o coeficiente de amortecimento.

Assim,

$$F_{\text{Peso}} = F_{\text{Restauradora}} + F_{\text{Atrito}}$$

$$ma = -ky - \nu y^0$$

Ou seja,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - \frac{\nu}{m} \frac{dy}{dt} \quad (35)$$

é a equação do movimento de um oscilador amortecido.

As raízes de (35) são dadas por $r_{1,2} = \frac{\nu}{2m}(-1 \pm \sqrt{\Delta})$, onde $\Delta = 1 - \frac{4km}{\nu^2}$.

Há três casos a serem analisados:

$\Delta > 0$: o coeficiente de amortecimento é grande e o movimento é denominado subamortecido. A solução geral é expressa por

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

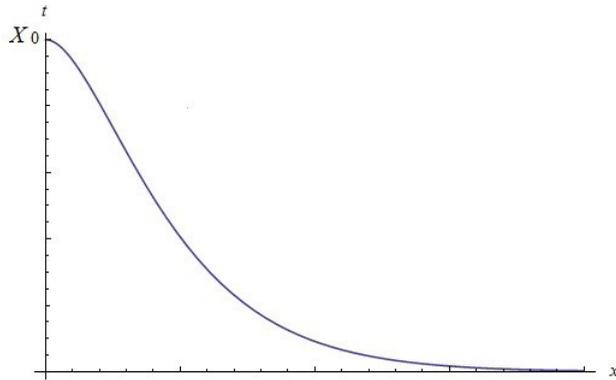
e como $-1 \pm \sqrt{\Delta} < 0$ (pois $0 < \Delta < 1$), r_1 e r_2 são negativas e, assim, $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

$\Delta = 0$: nesse caso, o movimento é denominado criticamente amortecido e $\nu^2 = 4km$. As raízes são $r_1 = r_2 = -\frac{\nu}{2m}$ e a solução geral é dada por

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e\left(-\frac{\nu t}{2m}\right)$$

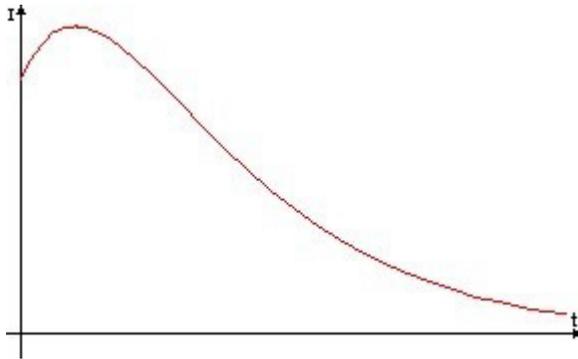
uma função não periódica que tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ (sem oscilações).

Figura 2 – Gráfico do movimento de um oscilador subamortecido



Fonte: <http://fis26maxwell.blogspot.com.br/2013/04/questao-faca-o-grafico-da-expressao-da.html>

Figura 3 – Gráfico do movimento de um oscilador criticamente amortecido



Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/CircuitoRLC#mediaviewer/File:RLC - serial - CriticalDamping.PNG](http://pt.wikipedia.org/wiki/CircuitoRLC#mediaviewer/File:RLC_-_serial_-_CriticalDamping.PNG).

$\Delta < 0$: nesse caso, o movimento é denominado *subamortecido*. As raízes são dadas!

por $r_{1,2} = \left(\frac{-v \pm i\sqrt{4km - v^2}}{2m} \right)$ a solução geral é

$$y(t) = e^{\left(\frac{-vt}{2m}\right)} \left(c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{4km - v^2}}{2m} t + c_2 \operatorname{cos} \frac{\sqrt{4km - v^2}}{2m} t \right)$$

ou seja, o movimento não é periódico, mas é oscilatório e, $x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

9 APLICAÇÃO: MOVIMENTO VERTICAL DA PONTE DE TACOMA NARROWS

O modelo do movimento vertical da ponte de Tacoma é uma variação de (??), dado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - cy + w(t) \quad (36)$$

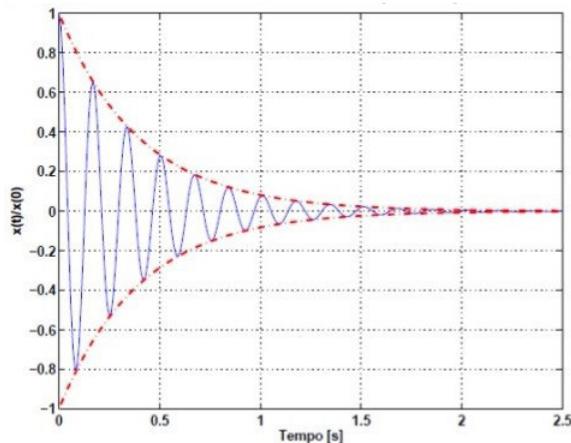
Onde

w : função que modela a força do vento;

$b > 0$: coeficiente de amortecimento;

$c = \begin{cases} \delta + g, & y < 0 \\ g, & y \geq 0 \end{cases}$ medida da resistência dos cabos (note que se $x < 0$, a ponte está acima do equilíbrio, logo os cabos não estão tracionados e não possuem resistência).

FIGURA 4: Gráfico do movimento de um oscilador subamortecido



Fonte: <http://image.slidesharecdn.com/4-sistemascomumgraudeliberdade-111222061007phpapp01/95/4-sistemas-com-um-grau-de-liberdade-11-728.jpg?cb=1324556512>

A equação obtida no modelo é homogênea, linear e de 2º ordem. Dessa forma, tal equação pode ser resolvida analiticamente. A solução é dada por

$$y(t) = e^{-\frac{bt}{2}} (c_1 \text{sen}(\beta t) + c_2 \text{cos}(\beta t)) \quad (37)$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2 - 4(\delta + g)}}{2}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{b^2 - 4g}}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

A forma da solução assemelha-se a uma soma de cossenos. Assim, para facilitar a análise do sinal de y em relação a t , pode-se reescrever (37) como

$$y(t) = Ae^{-\frac{bt}{2}} \cos(\beta t - \gamma) \quad (38)$$

$$\text{Onde } A \text{ e } \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ e } \text{tg}\gamma = \frac{c_1}{c_2}.$$

Assim, basta analisar o sinal de $\cos(\beta t - \gamma)$ para obter o sinal de y . Como o movimento da ponte é vertical e o eixo de referência é o tabuleiro, temos que quando a ponte está em equilíbrio, $-\frac{\pi}{2} \leq \cos(\beta t - \gamma) \leq \frac{3\pi}{2}$.

Não é fundado que $w(t)$ é uma função constante, pois cada rajada de vento incide sobre a ponte com ângulo, intensidade e duração diferentes, modificando os coeficientes da equação do modelo. Assim, não é possível determinar exatamente a amplitude das oscilações do tabuleiro da ponte a cada rajada.

10 EQUAÇÕES NÃO LINEARES QUE REGEM OS CABOS (MOVIMENTO)

Ao considerar que o comportamento dos cabos é não linear, eles resistem à tensão e não à compressão. A rigidez do cabo é k_i , $i = 1, \dots, n$, onde $k_i > 0$ e o comprimento do cabo é p_i , $i = 1, \dots, n$. Além disso, o valor de x_i, z_i , $i = 1, \dots, n$, é aproximadamente o mesmo, então a deformação do cabo entre (x_i, y_i) , $u(z_i)$, onde $u(z_i)$ é a deflexão do centro do vão no z_i , pode ser aproximadamente dada por $y_i - p_i - u(z_i)$. A energia de deformação dos cabos é dada por $\phi(y, u)$.

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i \{(y_i - p_i - u(z_i))^+\}^2 \phi(y, u) \quad (1)$$

Que é válido por $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (A) na maneira diferencial da definição Figue segue a desigualdade

$$k_i (y_i - p_i - u(z_i))^+ - F_i > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

A função $u \in W_V$, que está entre os parâmetros mínimos de realização $J(\cdot, \cdot, \cdot)$, que satisfaz igualdade variacional.

$$b_V(u, v) - 2 \sum_{i=1}^n k_i (y_i - p_i - u(z_i))^+ v(z_i) = L_F$$

Realizada por todo $v \in W_V$.

Em seguida, vamos nos restringir a alguns $x_i \in \mathbb{R}^n$, correspondendo à forma do cabo principal.

$$s_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

Considerando que $x, y \in \mathbb{R}^n$ que resolve (1) satisfazendo a relação

$$(B) \quad x_i < x_{i+1}, \quad s_j < s_{j+1}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Da primeira desigualdade em (B) em si estão definidas corretamente que correspondem à situação na Fig. 2 onde o ângulo ϕ_i , $i = 1, \dots, n + 1$, satisfaz a relação

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < \varphi_{n+1} < \frac{\pi}{2},$$

Que parece ser bastante natural para a forma do cabo principal se a construção inteira está em equilíbrio, então x, y, u são o mínimo de $J(\cdot, \cdot, \cdot)$. Dando (x_0, y_0, u_0) $y_0, (u_{x_n}^{from+1}, y_{R_n}^{n+1, R}, \eta_j^i, \omega_j^i) > 0$ são a solução do problema, $F_j > 0$, $i = 1, \dots, n + 1$, $j = 1, \dots, n$ se satisfaz a variação $1, \dots, n$, $F \in L^2(0, L)$ são iguais (1) e (2) e x, y, u são soluções de Q do problema se x, y, u são soluções de P

$$x_i = z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Os valores de z_i são as posições em cada cabo que as estantes estão ligados à extensão central. A solução para o problema Q pode ser aplicada para designar se queremos que as estrias dos cabos permaneçam verticais sob forças geradas pelo próprio peso da construção.

11 CONCLUSÕES

Com os resultados coletados por meio das equações lineares e não lineares conseguimos identificar os efeitos que ocorreram em cada parte da estrutura da ponte.

O experimento foi dividido nas seguintes fases: 1- Ponte estática (totalmente parada) representando momentos antes do incidente (Figura 1: anexo); 2- Ponte em movimento: ventos criaram vórtices no centro do vão que ocasionaram a não linearidade dos cabos, fazendo com que os mesmos rompessem já que não suportavam forças de compressão. O rompimento dos cabos fez a ponte entrar em movimento de torção logo após a ponte entrar em movimento de torção, a mesma não resistiu e veio ao chão.

Futuramente será feita a comparação com pontes suspensas famosas ao redor do mundo, como a *Golden Gate* em São Francisco, Califórnia; Ponte do Brooklyn na Cidade de Nova York; Ponte 28 de Abril de Lisboa à cidade de Almad; dentre outras, procurando analisar os mesmos fenômenos que ocorreram com a ponte de Tacoma e entre essas pontes citadas acima.

Conforme apresentado durante o artigo, ventos fortes não dissipados pela estrutura da ponte causaram oscilações verticais na mesma, desta forma, retirando a linearidade dos cabos, uma vez que com o movimento vertical de sua estrutura, cabos diferentes não estarão em tensão ao mesmo tempo, dessa forma, forçando certos cabos mais que os outros (não-linearidade). A partir do momento que a ponte recebe

rajadas de ventos mais fortes, a diferença de tensão entre os cabos ajuda a intensificar significativamente as oscilações; ocorrendo a avaria em um dos cabos do meio do vão, os movimentos que eram verticais passaram a ter uma espécie de movimentação de torção, forçando assim ainda mais a sua estrutura e levando-a ao colapso.

Portanto, levando em consideração os fatos destacados acima e os modelos matemáticos, fica evidente que a principal causa do desabamento foram os efeitos não-lineares, uma vez que a ressonância por si só não seria suficiente para causar tal dano na estrutura da ponte, mas deixando claro que sua ajuda foi significativa para o fato ocorrido.

REFERÊNCIAS

CAVALCANTI. Ponte Tacoma Narrows, 1940 – Um estudo dos efeitos não-lineares. 2015. Disponível em: <<http://www.astropt.org/2015/04/06/ponte-tacoma-narrows-1940-um-estudo-dos-efeitos-nao-lineares/>>. Acesso em: 1 out. 2016.

DVD AND TEACHER'S GUIDE. Twin Views of the Tacoma Narrows Bridge Collapse. Disponível em: <https://www.aapt.org/Store/upload/tacoma_narrows2.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2016.

GIES, Joseph. Bridges and Men: Doubleday. Bridges and Men, Twin Views of the TACOMA NARROWS BRIDGE COLLAPSE. Garden City, New York, 1963. Disponível em: <https://www.aapt.org/Store/upload/tacoma_narrows2.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2016.

LAZER, A.C.; MCKENNA, P.J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: **Some New Connections with Nonlinear Analysis**. SIAM Review, v.32, n.4, p.537-578, dec. 1990.

LEÃO, L.S.; ALVES, L.A. **Aplicações de equações diferenciais ordinárias à engenharia civil**. Uberlândia, v.4, n.1, p.16-29, mar. 2016.

MALÍK, Josef. Nonlinear models of suspension bridges. República Tcheca, 2005. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com>> Acesso em: 1 dez. 2016.

SOARES, R.A.L.; BARBOSA F.R. **O uso de equações diferenciais na justificativa do desabamento da ponte Tacoma Narrows**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, 2012.

Data do recebimento: 27 de Janeiro de 2017

Data da avaliação: 05 de Fevereiro de 2017

Data de aceite: 15 de Fevereiro de 2017

1 Graduando em Engenharia Civil da Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: soaresrodrigues97@gmail.com

2 Graduando em Engenharia Civil da Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: matt_shad0ws@outlook.com

3 Graduando em Engenharia Civil da Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: alemaothiagoboss98@gmail.com

4 Prof. Esp. da Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: aislanprimo14@gmail.com

5 Graduanda em Licenciatura em matemática da Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: anitasilvs74@gmail.com

