# APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR NA ENGENHARIA ELÉTRICA: ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS EM CORRENTE CONTÍNUA

Wanderson Vieira Dias Santos[1]
Aislan Silva Primo[2]

cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas

Engenharia

ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica, que tem como fundamento a análise de circuitos elétricos em corrente continua, baseado em um circuito elétrico, no qual contém dois resistores de 22Ω, dois de 10Ω e um de 47Ω juntamente com duas fontes de tensão de 9V e pequenos fios condutores, isso montado em uma protoboard. Empregou-se nesse circuito, nomeado no artigo como circuito base, ferramentas da álgebra linear, com ênfase na solução de sistemas lineares, isso juntamente com ferramentas da física elétrica: A Lei de Ohm e As Leis de Kirchhoff. Os dispositivos do circuito base foram selecionados de forma que os valores encontrados como solução do sistema linear, retirado algebricamente do circuito base, tivessem valores possíveis de ser escrito na forma de fração, isso para uma demonstração fácil dos cálculos matemáticos. Os resultados experimentais encontrados matematicamente foram comparados com os resultados encontrados no multímetro, considerando as tolerâncias de cada dispositivo.

## PALAVRAS-CHAVE:

Álgebra Linear. Aplicação. Circuitos Elétricos. Multímetro. Protoboard.

## 1 INTRODUÇÃO

É possível definir de maneira simples a álgebra linear por meio da disjunção desses dois vocábulos, ou seja, a palavra álgebra e a palavra linear. A álgebra é a manipulação de operações matemáticas entre valores numéricos juntamente com termos desconhecidos ou incógnitos, isso por símbolos que expressam igualdade ou desigualdade entre esses valores e termos pertencentes a esse meio. No momento em que essas operações são bem definidas e descritas de forma linear pode-se dizer que está definida a álgebra linear, um ramo da matemática que surge de detalhados estudos de sistemas de equações lineares.

Nesse ramo da matemática, vetores, espaços vetoriais, espaços vetoriais euclidianos, transformações lineares, operadores lineares, vetores próprios e valores próprios, formas quadráticas, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares são ferramentas pertencentes à álgebra linear. Vale ressaltar, todavia, que apenas as três últimas serão objetos de estudos, com o intuito de apresentar aplicações desse ramo da matemática na engenharia elétrica, tendo como foco principal a análise de circuitos elétricos em corrente contínua.

Em um curso formador de engenheiros eletricistas é de grande importância que, esse, passe para o indivíduo a importância da utilização das ferramentas matemáticas, como por exemplo, as disciplinas da área da matemática, as quais compõem um curso de engenharia ou especificamente a engenharia elétrica, área de foco neste artigo. Por esse motivo vale introduzir, antes do desenvolvimento da pesquisa documental e experimental, a definição de uma das expressões mais importante deste trabalho.

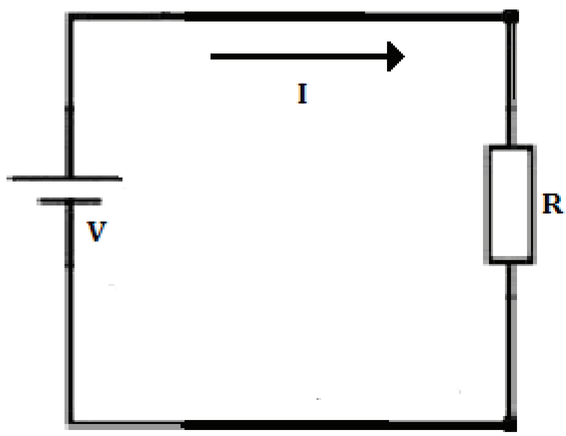
A junção de determinados elementos, os quais compõem um circuito elétrico elementar são de grande importância para a definição desse circuito, porque existe uma diferença que irá ser discutida mais adiante entre um circuito elétrico elementar e um circuito não elementar. Para o surgimento de um circuito elétrico ocorrer é preciso unir três elementos: uma fonte de diferença de potencial elétrico, um condutor elétrico e um elemento capaz de utilizar a energia elétrica. É importante levantar que este trabalho gira em torno da aplicação da álgebra linear em análise de circuitos elétricos, apenas, em corrente continua.

## 2 GRANDEZAS FÍSICAS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Em um circuito elementar, ou seja, em um circuito elétrico na sua menor forma possível as grandezas físicas: corrente, tensão, resistência e potência elétrica são encontradas de maneira simples, apenas necessitando de aplicações de determinas leis físicas. Entretanto em circuitos elétricos mais complexos, nos quais existem vários dispositivos elétricos é preciso a aplicação da álgebra linear para poder encontrar os valores numéricos das grandezas elétricas, isso por meio das resoluções de sistemas de equações lineares. Para tratar de circuitos elétricos é necessário definir as principais leis físicas que regem o comportamento das grandezas físicas em um circuito elétrico, seja ele simples ou complexo, as quais são: a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff.

A lei de Ohm relata que a (tensão elétrica) ou a diferença de potencial elétrico, representado pela letra maiúscula V, é igual ao produto da resistência elétrica pela corrente elétrica, ou seja, mantendo-se constante o valor da tensão elétrica em um circuito com temperatura, também, constante, o fluxo de elétrons que passa pela secção transversal de um meio condutor em um determinado intervalo de tempo (corrente elétrica), representado pela letra maiúscula I, é inversamente proporcional ao quanto um determinado meio resiste a passagem desses elétrons (resistência elétrica), representado pela letra maiúscula R, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Representação de um circuito elementar



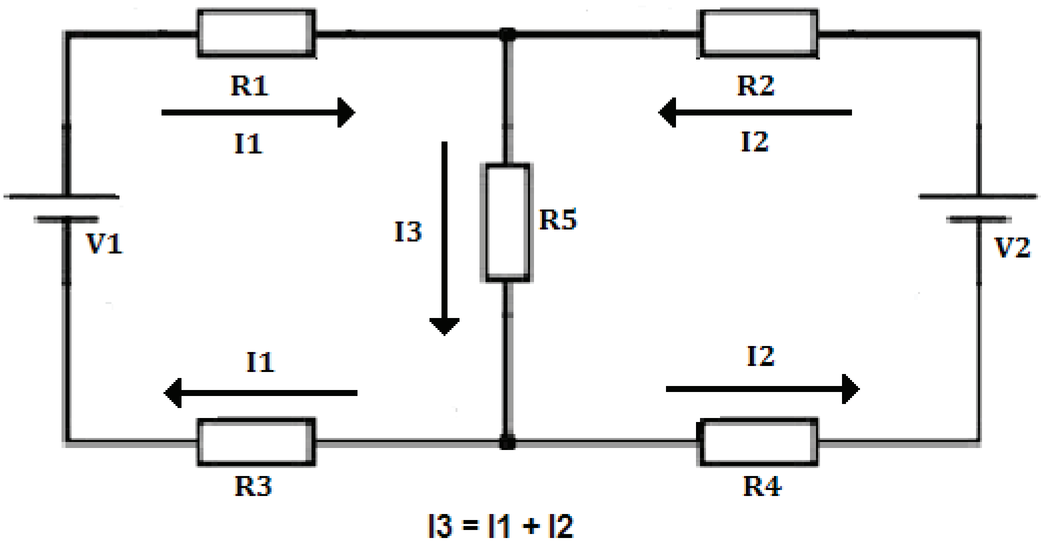

$$V = R \times I$$

Fonte: Próprio autor

No circuito da Figura 1, um circuito elementar, conhecendo duas grandezas quaisquer que sejam, é simples encontrar a terceira grandeza apenas aplicando a lei de Ohm. Todavia, como já foi dito, em circuitos elétricos mais complexos, como vai ser mostrado logo em seguida, para poder descobrir determinadas grandezas em determinados circuitos elétricos é preciso utilizar conhecimentos algébricos.

As duas leis de Kirchhoff: lei de Kirchhoff das correntes e lei de Kirchhoff das tensões relata que: a primeira, a soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual à soma algébrica das correntes que saem de um nó, sabendo-se que um nó em circuitos elétricos é um ponto que une as extremidades de três ou mais dispositivos elétricos, como mostra a Figura 2.

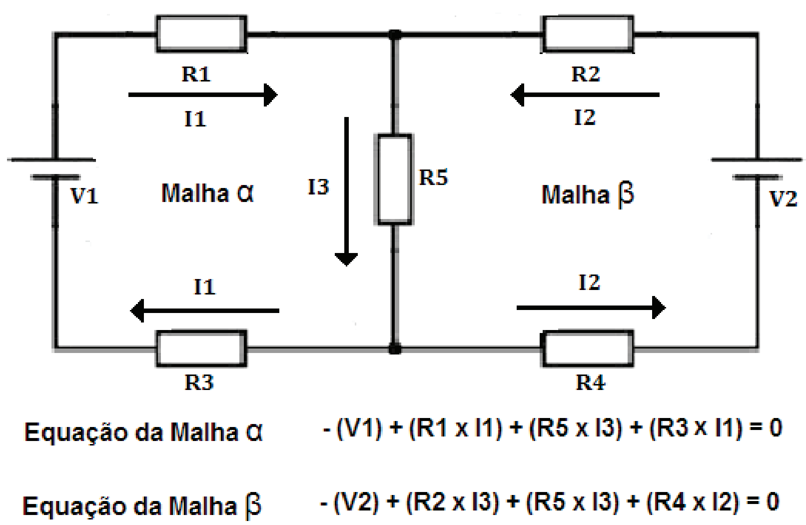
Figura 2 – Circuito representante para a forma algébrica da primeira lei de Kirchhoff




Fonte: Próprio autor

A segunda, a soma algébrica das tensões elétricas em uma malha de um circuito elétrico é igual a zero, sabendo-se que malha em circuitos elétricos é um curso condutor cujo nó inicial coincide com o nó final de forma que esse curso não englobe nenhum outro curso, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Circuito representante para a forma algébrica da segunda lei de Kirchhoff




Fonte: Próprio autor

É notório que no momento em que se aplica as leis de Kirchhoff em circuitos elétricos surge um sistema de equações lineares, onde nesse casso é um sistema linear de três equações, no qual pode-se ser resolvido por meio de vários artifícios algébricos.

## 3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Equações lineares são várias equações da forma como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Forma algébrica de uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Fonte: Próprio autor

Na qual $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis e b é o termo independente. Para que exista um sistema de equações lineares são necessárias várias equações lineares, na qual a solução de uma equação linear, ou seja, o valor de uma determinada variável, a qual faz a igualdade da equação ser real, seja a solução, não somente de uma equação, mas sim de todas as equações do sistema.

A partir disso pode-se dizer que quando a solução de uma equação (r) pode ser também validada como solução de outras equações, como por exemplo, as equações (s) e (t), é verídico afirmar que as equações (r), (s) e (t) são um conjunto de equações que formam um sistema de equações lineares. Segue logo abaixo, na Figura 5, a representação de um sistema linear.

Figura 5 – Sistema linear formado por várias equações lineares

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Fonte: Próprio autor

Existem sistemas de equações compatíveis e incompatíveis. Os sistemas de equações compatíveis são os sistemas que admitem soluções para as equações, todavia os sistemas de equações compatíveis se dividem em sistemas determinados, os quais admitem apenas uma única solução e sistemas indeterminados, os quais admitem, não apenas uma única solução, mas infinitas soluções. Já os sistemas de equações incompatíveis são os sistemas que não admitem nenhuma solução.

É importante ressaltar que existem vários métodos para se determinar a solução de um sistema de equações lineares, como por exemplo, os métodos: Gauss-Jordan, matriz inversa, Cramer, substituição, comparação e soma. Neste artigo, todavia, irá ser tópico de solução de sistemas lineares apenas o método de Cramer.

O método de Cramer, nomeado assim em homenagem a Gabriel Cramer (1704 - 1752) por ter trabalhado de maneira considerável com sistemas lineares com o intuito de achar soluções em termos de determinantes. Esse método é estruturado com base na existência de um sistema de equações lineares **S**, como o que é mostrado na Figura 5, ou seja, um sistema de **m** equações com **n** incógnitas sobre **IR**.

A partir disso é necessário transformar esse sistema **S** em três matrizes: uma matriz **A** do tipo **m por n**, uma matriz **X** do tipo **n por 1** e uma matriz **B** do tipo **m por 1**, respectivamente. Então dessa forma o sistema de equações lineares **S** poderá ser escrito sob a forma matricial **A.X = B**, onde: **A** recebe o nome de matriz dos coeficientes de **S**, **X** recebe o nome de matriz das incógnitas de **S** e **B** recebe o nome de matriz dos resultados de cada equação de **S**, como é mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Representação de um sistema de equações lineares **S** na forma matricial **A.X = B**

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\
a_{31} & . & . & . & a_{3n} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
a_{m1} & . & . & . & a_{mn}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n
\end{pmatrix}
$$

Fonte: Próprio autor

Com a obtenção da transformação dos sistemas lineares para a sua forma matricial, para ser possível encontrar a solução do sistema linear é necessário obter o valor do determinante geral, ou seja, o determinante da matriz **A**. Juntamente a isso é necessário, também, obter o valor do determinante de cada incógnita, o qual é obtido por meio da substituição de determinada coluna da matriz **A** pela matriz **B**.

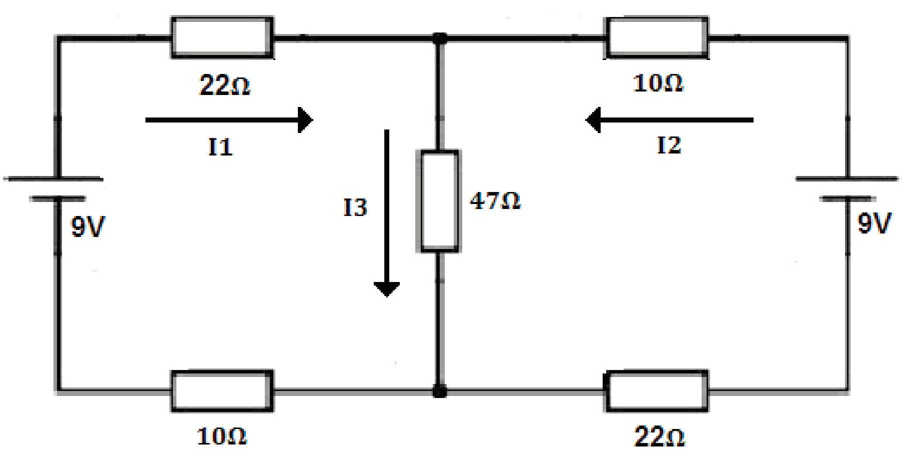
Esse determinante é encontrado por meio da matriz que surge quando se substitui a coluna da incógnita escolhida, a qual está presente na matriz **A**, pela matriz **B**. Essa nova matriz é nomeada pelo tipo da incógnita escolhida, como por exemplo, matriz da incógnita **x1**; matriz da incógnita **x2**; matriz da incógnita **x3** ou matriz da incógnita **xn**. É exatamente o determinante dessa nova matriz, a qual depende da incógnita escolhida, o determinante de cada incógnita, o qual depende, também, da incógnita escolhida.

Com o valor do determinante geral e o determinante de cada incógnita, para obter o valor da incógnita propriamente dita é preciso, apenas, obter a razão entre o determinante da incógnita escolhida e o determinante geral. Vale ressaltar que esse método irá ser utilizado como ferramenta para solucionar o sistema de equações lineares retirado do circuito elétrico utilizado como base e dessa forma a utilização desse método ficará clara.

## 4 DETERMINAÇÃO DAS CORRENTES DE UM CIRCUITO ELÉTRICO

Foi utilizado, neste artigo, como base para a demonstração da aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica, em especificamente na análise de circuitos elétricos em corrente contínua, um circuito elétrico formado por cinco resistores: dois de 22Ω; dois de 10Ω e um de 47Ω juntamente com duas fontes de tensão de 9V como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Circuito Base




Fonte: Próprio autor

Com os conhecimentos de resoluções de sistemas lineares, tópico da álgebra linear, juntamente com a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff, foi possível encontrar as três correntes elétricas, as quais foram demonstradas por meio de vetores na Figura 7. O desenvolvimento matemático das equações lineares retiradas das duas malhas do circuito base, por meio das leis de Kirchhoff, até determinar as correntes $I_1$, $I_2$ e $I_3$, ou seja, a solução do sistema linear montado a partir do circuito base, é demonstrado na Figura 8, no qual foi utilizado o método de Cramer para solucionar o sistema linear.

Figura 8 – Demonstração da determinação das correntes do circuito base

**Pela primeira lei de Kirchhoff:**

$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

**Pela segunda lei de Kirchhoff:**

**Malha 1**

$$-9 + 22I_1 + 47I_3 + 10I_1 = 0$$
$$32I_1 + 47I_3 = 9$$
$$32I_1 + 0I_2 + 47I_3 = 9$$

**Pela segunda lei de Kirchhoff:**

**Malha 2**

$$-9 + 10I_2 + 47I_3 + 22I_2 = 0$$
$$32I_2 + 47I_3 = 9$$
$$0I_1 + 32I_2 + 47I_3 = 9$$

**Dessa forma tem-se:**

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$32I_1 + 0I_2 + 47I_3 = 9$$
$$0I_1 + 32I_2 + 47I_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 32 & 0 & 47 \\ 0 & 32 & 47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

**Derteminante Geral**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 32 & 0 & 47 \\ 0 & 32 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 32 & 0 & 47 & 32 & 0 \\ 0 & 32 & 47 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\Delta G = (0 + 0 - 1024) - (1504 + 1504 - 0)$$
$$\Delta G = -1024 - 1504 - 1504$$
$$\Delta G = -4032$$

**Determinante $I_1$**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 47 \\ 9 & 32 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 47 & 9 & 0 \\ 9 & 32 & 47 & 9 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_1 = (0 + 423 - 288) - (423 + 0 - 0)$$
$$\Delta I_1 = 423 - 288 - 423$$
$$\Delta I_1 = -288$$

**Determinante $I_2$**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 32 & 9 & 47 \\ 0 & 9 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 32 & 9 & 47 & 32 & 9 \\ 0 & 9 & 47 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_2 = (423 + 0 - 288) - (0 + 423 - 0)$$
$$\Delta I_2 = 423 - 288 - 423$$
$$\Delta I_2 = -288$$

**Determinante $I_3$**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 9 \\ 0 & 32 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 32 & 0 & 9 & 32 & 0 \\ 0 & 32 & 9 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_3 = (0 + 0 + 0) - (288 + 288 + 0)$$
$$\Delta I_3 = -288 - 288$$
$$\Delta I_3 = -576$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta G} \qquad I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta G} \qquad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta G}$$

$$I_1 = \frac{-288}{-4032} \qquad I_2 = \frac{-288}{-4032} \qquad I_3 = \frac{-576}{-4032}$$

$$I_1 = \frac{1}{14}\,A \qquad I_2 = \frac{1}{14}\,A \qquad I_3 = \frac{1}{7}\,A$$

$$I_1 \simeq 71{,}429mA \qquad I_2 \simeq 71{,}429mA \qquad I_3 \simeq 142{,}857mA$$

Fonte: Próprio autor

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O circuito base, o qual já foi mostrado na Figura 7, foi montado em uma placa protoboard, como é demonstrado no anexo A, isso com o objetivo de utilizar um multímetro, aparelho que possibilita a medição da tensão elétrica; corrente elétrica e resistência elétrica, para comparar os valores obtidos nesse aparelho e os valores obtidos, utilizando a álgebra linear juntamente com as leis Kirchhoff.

Após a comparação, foi possível relatar, que o valor da tensão no resistor de 47Ω obtido no multímetro foi diferente do valor o obtido por meio dos cálculos, por fatores intrínsecos aos elementos do circuito. O valor da tensão obtido pelo multímetro é demonstrado no anexo B e os dois valores é mostrado logo abaixo na Figura 9.

Figura 9 – Tensões obtidas no resistor de 47Ω

| Multímetro | Álgebra Linear e Leis de Kirchhoff |
|---|---|
| 5,55 V | 6,71 V |

Fonte: Próprio autor

Vale ressaltar que os resistores utilizados no circuito da protoboard foram os utilizados no circuito base, porém esses elementos sempre têm certas faixas de tolerância o que interfere para que os valores obtidos em ambos os casos sejam iguais. A fonte de tensão elétrica utilizada na montagem do circuito na protoboard também foi de mesmo valor da fonte do circuito base, entretanto como a fonte foi uma pilha alcalina seu valor não é exatamente igual, isso é mostrado por meio de uma medição em um multímetro no anexo C. Na montagem do circuito foi utilizado além dos elementos do circuito, quatro pedaços de fita adesiva com dimensão aproximadamente de 15cm por 4cm, isso para fixar as fontes de tensão no fundo da placa protoboard.

## 5 CONCLUSÂO

Por tudo isso é possível relatar uma das aplicações da álgebra linear a realidade, especificamente, neste artigo, a utilização de ferramentas da álgebra linear, como principalmente as que tratam de resoluções de sistemas lineares, para a análise de circuitos elétricos em corrente contínua. Conclui-se então que essa ferramenta matemática possibilita o estudo de circuito elétrico, de forma que o indivíduo possa saber o comportamento de determinados dispositivos elétricos no circuito.

É importante ressaltar que o trabalho apresentado contribui para conclusões incentivadoras, não só para alunos, mas para muitos indivíduos, os quais pensam que determinados ramos da matemática não têm aplicações na vida real, uma afirmativa que não é válida, pois conforme Lobachevsky

## REFERÊNCIAS

CRUVINEL, Frederico Borges. **Tópicos de álgebra linear e aplicações em problemas de economia e de engenharia.** Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2961/5/TCC%20APLICA%C3%87%C3%95ES%20DE%20AL%20PROFMAT%202013.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2016.

LOBACHEVSKY, Nikolai Ivanovich. NILSSON, James W; RIEDEL, Susan A. **Circuitos elétricos.** 8.ed. São Paulo: Pearson, 2009.

PESCADOR, Andreza; POSSAMAI, Janaína Poffo; POSSAMAI, Cristiano Roberto. **Apli-**

**cação de álgebra linear na engenharia.** Disponível em: <http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2011/sessoestec/art2127.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2016.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear.** 2.ed. São Paulo: Pearson, 1987.

STERLING, Mary Jane. **Álgebra linear PARA LEIGOS.** Rio de Janeiro: Alta Books, 2012.

**Data do recebimento:** 20 de Maio de 2017
**Data da avaliação:** 5 de Junho de 2017
**Data de aceite:** 15 de Junho de 2017

1 Profissional livre Eletricista Instalador Predial de Baixa Tensão pelo Órgão Educacional Brasil Qualificação Profissional; Técnico de Nível Médio em Eletromecânica pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe; Graduando do curso de Engenharia Elétrica na Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: Wandersonosenhordoxadrez@outlook.com

2 Professor; Mestrando em Engenharia de Processos na Universidade Tiradentes – UNIT; Pós-graduado Lato Sensu em Metodologia do Ensino da Matemática pela Faculdade São Luís de França; Graduado em Matemática Licenciatura pela Universidade Tiradentes – UNIT. E-mail: Aislanprimo14@gmail.com