

# APLICAÇÃO DA ALGEBRA LINEAR EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Crislayne Sá Pereira<sup>1</sup>  
Leobaldo Alcantara Neto<sup>1</sup>  
Maria Daniela Silva Santos<sup>1</sup>  
Thais Maria Martins Nascimento<sup>1</sup>  
Erica Dantas Pereira Gama<sup>2</sup>  
José de Jesus Santos<sup>3</sup>

Engenharias



ISSN IMPRESSO 1980-1777  
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

## RESUMO

Este artigo propõe uma atividade visando os estudos voltados para circuitos elétricos com aplicações em álgebra linear. Chama-se de circuito simples aos circuitos que há apenas uma única corrente elétrica, ou seja, a corrente elétrica sai do gerador e o percorre somente em um único caminho até voltar a ele. Neste caso com uma única equação linear é possível descrevê-lo, mas quando o circuito é formado por  $n$  circuito simples precisamos de  $n$  equações para resolvê-lo. A corrente elétrica é um fluxo de elétrons que circula por um condutor quando entre suas extremidades houver uma diferença de potencial. Essa diferença de potencial é o que conhecemos como tensão. Resistores são componentes que têm por finalidade oferecer uma oposição à passagem de corrente elétrica, através de seu material (geralmente formado por isolante). A solução de um circuito elétrico só é possível graças as leis de Kirchhoff. A partir deste sistema de equações foram usados métodos numéricos para encontrar sua solução

## PALAVRAS-CHAVE

Circuitos elétricos. Álgebra Linear. Lei de Ohm. Leis de Kirchhoff

## ABSTRACT

This paper proposes an activity targeting the studies focused on electrical circuits with applications in linear algebra. Called single circuit to circuits that there is only one electrical current, ie the electric current leaves the generator and travels only one way to get back to it. In this case with a single linear equation can describe it, but when the circuit is made up of  $n$  simple circuit we need  $n$  equations to solve it. The electric current is a flow of electrons flowing through a conductor between its ends when there is a potential difference. This potential difference is what is known as voltage. Resistors are components that are intended to provide an opposition to the passage of electrical current through your stuff (usually formed by insulation). The solution of an electrical circuit is made possible by Kirchhoff's laws. From this system of equations were used numerical methods to find your solution.

## KEYWORDS

Electric Circuits. Linear Algebra. Ohm's Law. Kirchhoff Laws.

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo a exemplificação de algumas aplicações da álgebra linear na resolução de problemas complexos de circuitos elétricos. Enfatizado com os conhecimentos do curso teórico, podendo ser aplicados na prática. A elaboração das equações lineares deve-se a lei de ohm e as leis de Kirchhoff.

No início do século XIX, o físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854) descobriu duas leis que determinam a resistência elétrica dos condutores. Essas leis, em alguns casos, também valem para os semicondutores e os isolantes. O cientista alemão realizou várias experiências, medindo estas voltagens (e as correntes correspondentes) quando aplicadas em diversos condutores feitos de substâncias diferentes. Verificou então que, para muitos materiais, principalmente os metais, a relação entre a voltagem e a corrente mantinha-se constante.

Um circuito elétrico é a ligação de elementos elétricos, tais como resistores, indutores, capacitores, diodos, linhas de transmissão, fontes de corrente e interruptores, de modo que formem pelo menos um caminho fechado para a corrente elétrica. Um circuito elétrico simples, alimentado por pilhas, baterias ou tomadas, sempre apresenta uma fonte de energia elétrica, um aparelho elétrico, fios ou placas de ligação e um interruptor para ligar e desligar o aparelho.

Estando ligado, o circuito elétrico está fechado e uma corrente elétrica passa por ele. Esta corrente pode produzir vários efeitos: Luz, movimentos, aquecimentos, sons, e

etc. Circuitos elétricos são conjuntos formados por um gerador elétrico, um condutor em circuito fechado e um elemento capaz de utilizar a energia produzida pelo gerador.

A corrente elétrica é um fluxo de elétrons que circula por um condutor quando entre suas extremidades houver uma diferença de potencial. Esta diferença de potencial chama-se tensão. A facilidade ou dificuldade com que a corrente elétrica atravessa um condutor é conhecida como resistência. Esses três conceitos: corrente, tensão e resistência estão relacionadas entre si, de tal maneira que, conhecendo dois deles, pode-se calcular o terceiro por meio da Lei de Ohm. A corrente elétrica se divide em contínua, que é o fluxo ordenado de elétrons sempre em uma mesma direção, e em alternada, que é uma corrente cujo sentido varia no tempo.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Desde muitos anos a ciência vem exercendo um papel importante na compreensão de fenômenos e posterior desenvolvimento de modelos com grande grau de aplicabilidade em nosso cotidiano. Dentre as ciências, a Física é considerada a mais fundamental das ciências naturais, sendo, também, aquela cuja formulação atingiu o maior grau de refinamento (NUSSENZVEIG, 2002).

De acordo com Symon (1996), a exatidão da Física, enquanto ciência compreende-se que suas leis, uma vez expressas em forma de equações matemáticas, preveem e descrevem os resultados de medidas quantitativas precisas. Não só a praticidade, mas o poder de prever precisamente e controlar o fenômeno natural são vantagem de uma teoria física quantitativa.

Nesse passo, é de se observar que muitos dos problemas encontrados pelas chamadas ciências exatas possuem como solução final a resolução de sistemas de equações lineares. Em outras palavras, muitos dos problemas que surgem, por exemplo, na física e na engenharia, somente podem ser resolvidos por meio dos sistemas de equações lineares e de outras aplicações que existem, seja na matemática, seja em outras áreas (BURDEN, 2008).

Segundo Halliday (2009) para o estudo da Lei de Ohm é necessário conhecermos um pouco sobre as grandezas envolvidas como corrente, tensão, resistência e potência elétrica. Um condutor cuja função em circuito é introduzir certa resistência é chamado de resistor. A seta da corrente é desenhada no sentido em que portadores de cargas positivas se moveriam, mesmo que os portadores sejam negativos e se movam no sentido oposto. A lei de ohm é a afirmação de que a corrente que atravessa um dispositivo é sempre diretamente proporcional à diferença de potencial aplicada ao dispositivo.

O circuito elétrico precisa de um elemento que forneça energia ao sistema, este equipamento é chamado de bateria ou gerador e apresenta uma diferença de poten-

cial (ddp). Young (2009) define um nó ou junção como um ponto do circuito onde ocorre a união de dois ou mais condutores. A lei dos nós, como já foi apresentada, diz que a soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem. De acordo com Gussow (2009) podemos dizer que uma malha é um percurso fechado em um circuito, onde partimos de um ponto qualquer do circuito e retornamos a esse mesmo ponto. Matematicamente, podemos verificar que a soma de todas as quedas de tensões ao longo de uma malha em um circuito é nula.

A análise de um circuito elétrico qualquer pelas leis de Kirchhoff nos fornece um sistema de equações lineares. Sempre que usarmos as leis de Kirchhoff, seja a das malhas ou dos nós, sempre teremos o número de equações iguais ao número de incógnita, para que assim possamos chegar a um sistema de equações possível e determinado.

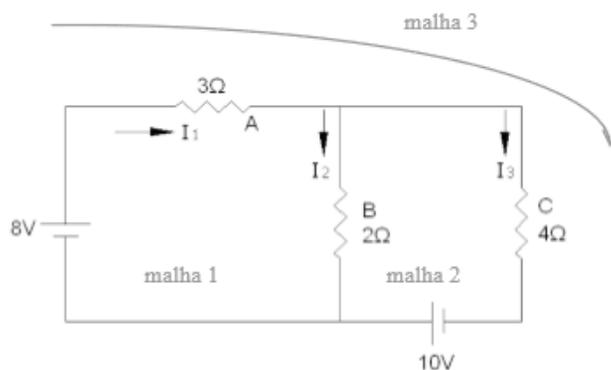
### 3 MATÉRIAS E MÉTODOS

O grupo após pesquisas realizadas, em relação ao tema proposto, decidiu prosseguir com o projeto, inicialmente, por meio de uma pesquisa bibliográfica e depois de ter toda a bagagem teórica formulou-se um problema onde é possível aplicar as leis já discutidas anteriormente.

#### 3.1 MODELANDO OS DADOS

A partir da representação do circuito elétrico, foi possível aplicar as três leis discutidas anteriormente (Lei de Ohm e as duas leis de Kirchhoff) por meio de um Sistema Linear. A Figura 1 a seguir ilustra o problema que foi proposto.

Figura 1 – Ilustração da malha



Fonte: solar, <Coppe.ufrj.br/practica2.html>.

A primeira equação do modelo consiste em igualar a soma das correntes que entram e que saem de um nó, de acordo com a lei das correntes de Kirchhoff  $I_1 = I_2 + I_3$ .

Vamos definir  $I_1=A$ ,  $I_2 = B$  e  $I_3 = C$  como as correntes que atravessam os ramos do circuito mostrado na Figura 1 anterior. Assim nossa primeira equação é dada por:

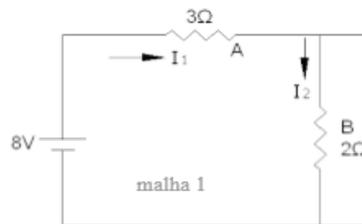
$$A - B - C = 0 \quad (1)$$

A segunda e terceira equações do modelo consistem em determinar, dentro das malhas, a soma da diferença de potencial elétrico em cada elemento do circuito igualando-se a zero (Lei da Voltagem de Kirchhoff).

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Se observado o desenho da malha acima colocamos um modelo constituído de três malhas, com este modelo teremos três equações lineares. Para a malha (1) um (Figura 2), temos  $8 - 3A - 2B = 0$ .

Figura 2 – Ilustração da malha 1



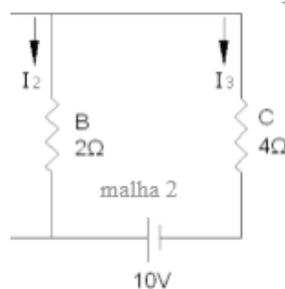
Fonte: solar <Coppe.ufrj.br/practica2.html>.

Este resultado pode ser escrito na forma:

$$3A + 2B + 0C = 8 \quad (2)$$

Para a malha 2 (Figura 3), temos que  $10 + 2B - 4C = 0$ .

Figura 3 – Ilustração da malha 2



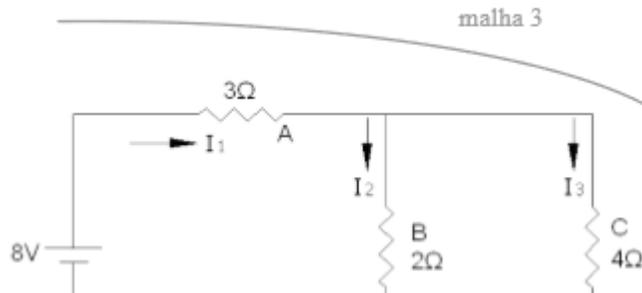
Fonte: solar <coppe.ufrj.br/practica2.htm>.

Este resultado pode ser escrito na forma:

$$0A - 2B + 4C + 10 \quad (3)$$

Não há necessidade de aplicarmos essas leis a terceira malha (malha externa (Figura 4), porque obteremos a soma das equações dois (2) e três (3) como podemos concluir a seguir:

Figura 4 – Ilustração da malha 3



Fonte: solar <coppe.ufrj.br/practica2.html>.

$$8 - 3A - 4C + 10 = 0 \Rightarrow 3A + 0B + 4C = 18$$

Note que a equação da malha externa do circuito elétrico (Figura 4) é resultante da soma das equações algébricas das malhas 1 (um) e 2 (dois). Esse acontecimento é identificado como uma combinação linear na linguagem da álgebra linear.

Após a criação dos modelos de cada malha, a partir das equações 1, 2 e 3, chegou-se no seguinte sistema linear a seguir:

$$\begin{array}{rclcl} A & - & B & - & C & = & 0 \\ 3A & + & 2B & + & 0C & = & 8 \\ 0A & - & 2B & + & 4C & = & 10 \end{array}$$

Dados o sistema de equações, vamos escrevê-lo na forma de uma matriz completa dos coeficientes.

$$\begin{array}{l} L1 \rightarrow L2 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & +2 & +0 & 8 \\ 0 & -2 & +4 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L3 \rightarrow L1 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & +5 & +3 & 8 \\ 0 & -2 & +4 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 8 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L3 \rightarrow L1 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & +5 & +3 & 8 \\ 0 & -2 & +4 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 8 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

L3  $(-2/5) + L2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & +3 \\ 0 & 0 & +26/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 5/13 \\ 66/5 \end{matrix}$$

Segundo passo: L2  $(15/26) + L3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & +0 \\ 0 & 0 & +26/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 5/13 \\ 66/5 \end{matrix}$$

L1  $(-5/26) + L3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & +0 \\ 0 & 5 & +0 \\ 0 & 0 & +26/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 5/13 \\ 66/5 \end{matrix}$$

L1  $(-1/5) + L2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & +0 \\ 0 & 5 & +0 \\ 0 & 0 & +26/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 34/13 \\ 5/13 \\ 66/5 \end{matrix}$$

Escalonado para se obter a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & +0 \\ 0 & 1 & +0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 34/13 \\ 1/13 \\ 33/13 \end{matrix}$$

Se aplicarmos o método de resolução de Sistemas Lineares por escalonamento, discutido em sala de aula, na resolução desse modelo, obtém-se como solução:

$$S = \left\{ \left( \frac{34}{13}, \frac{1}{13}, \frac{33}{13} \right) \right\}$$

(as unidades das correntes são medidas em Ampères)

No nosso resultado final concluímos que, apesar desse modelo possuir valores definidos, é possível modificar os valores constantes do modelo, obtendo assim novos valores para cada corrente elétricas.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Facilmente se percebe que a álgebra linear é uma importante disciplina pelas suas múltiplas aplicações e pelo alcance de sua linguagem. Neste artigo focamos em demonstrar que por meios de aplicações da álgebra linear podemos resolver vários temas.

Fazendo aplicação da álgebra sobre circuitos elétricos (lei de Ohm e leis de Kirchhoff) podemos determinar as correntes e tensões dos elementos de um dado circuito. Podemos, também, verificar a validade dos valores de tensões e correntes obtidas utilizando as Leis de Kirchhoff.

Ao final deste trabalho vimos que os métodos iterativos e diretos que foram utilizados para obter uma solução dos sistemas de equações gerados pela aplicação das leis de Kirchhoff e ohm em circuito elétrico vão se diferir em vários aspectos de um para o outro, pois segundo Sperandio e outros autores (2003), esses aspectos dizem respeito quanto a convergência, erro de arredondamento, também quanto ao número de iterações e entre outros. No entanto possui em comum o mesmo objetivo que é encontrar o vetor solução que satisfaça as equações em estudo embora os métodos sejam diferentes.

## REFERÊNCIAS

BURDEN, Richard L; FAIRES, Douglas. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage, 2008.

CIRCUITOS ELÉTRICOS. Disponível em: <[www.feiradeciencias.com.br/sala12/12\\_t01.asp#Corrente elétrica](http://www.feiradeciencias.com.br/sala12/12_t01.asp#Corrente%20el%C3%A9trica)>. Acesso em: 1 maio 2015.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice, 2006.

GUSSOW, Milton. **Eletricidade básica**. Tradução José Lucimar do Nascimento. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção Schaum).

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física – gravitação, ondas e termodinâmica**. 4.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física** 3.8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica**. V.3, São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica**. V.1, 4.ed. São Paulo: Blucher, 2002.

RESISTORES - Eletrônicos e físicos. Disponível em: <[www.infoescola.com/electronica/circuito-rc/](http://www.infoescola.com/electronica/circuito-rc/)>. Acesso em: 1 maio 2015.

SYMON, Keith R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campos, 1996.

SÓ FÍSICA - **Gustav Robert Kirchhoff**. Disponível em: <[www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/gustav\\_kirchhoff.php](http://www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/gustav_kirchhoff.php)>. Acesso em: 1 maio 2015.

SÓ FÍSICA - **Georg Simon Ohm**. Disponível em: <[www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/Georg\\_Ohm.php](http://www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/Georg_Ohm.php)>. Acesso em: 1 maio 2015.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger, A. **Física 3**: Eletromagnetismo. Tradução Sonia Midori Yamamoto; Revisão técnica Adir Moysés Luiz. 12.ed. São Paulo: Pearson, 2009.

---

**Data do recebimento:** 20 de maio de 2015

**Data da avaliação:** 27 de maio de 2015

**Data de aceite:** 01 de junho de 2015

---

---

1. Graduandos da Universidade Tiradentes, do curso de Engenharia de Petróleo.

E-mail: thaismartinsn@hotmail.com

2. Mestra em Geofísica pela (UFBA), Bacharel em Matemática com ênfase em Informática pela (UNIT), Professora das Engenharias na Universidade Tiradentes. E-mail: ericagama@hotmail.com

3. Mestre em Física (UFS), Especialista em Ensino de Astronomia (UNICSUL), Graduado em Física Licenciatura (UFS), Professor das Engenharias na Universidade Tiradentes. E-mail: suedog@aig.com.br